Домашнее задание №3

1. Найти группу Галуа $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_r)$.

2. Вычислить группу Галуа поля разложения многочлена

   (a) $x^2 - 2$ над $\mathbb{Q}$;

   (b) $x^3 - 2$ над $\mathbb{Q}$;

   (c) $x^4 - 2$ над $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$;

   (d) $x^p - c$ над $\mathbb{Q}$, где p — простое число, и $c \in \mathbb{Q}$ не является p-й степенью рационального числа;

   (e) $(x^2 - p_1) \cdots (x^2 - p_n)$ над $\mathbb{Q}$, где $p_1, \ldots, p_n$ — попарно различные простые числа.

3. Доказать, что сепарабельный многочлен $f \in K[x]$ неприводим тогда и только тогда, когда группа Галуа расширения $K(f) \supseteq K$ транзитивно переставляет корни многочлена f в $K(f)$.

4. Пусть $f \in K[x]$ — сепарабельный многочлен, $a_1, \ldots, a_n$ — все его корни в поле разложения $L = K(f)$, $G = \mathrm{Aut}(L/K)$ — группа Галуа, рассматриваемая как подгруппа в группе S_n перестановок корней.

   (a) Пусть $H \subseteq S_n$ — произвольная подгруппа, и $q \in K[x_1, \ldots, x_n]$ — многочлен, стабилизатор которого при действии группы S_n равен H. Доказать, что многочлен $Q(x, x_1, \ldots, x_n) = \prod_\sigma (x - q(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}))$, где σ пробегает по одному элементу из каждого смежного класса в S_n по H, симметричен по отношению к переменным $x_1, \ldots, x_n$.

   (b) Пусть *резольвента* $R(x) = Q(x, a_1, \ldots, a_n) \in K[x]$ многочлена f по отношению к подгруппе H перестановок его корней сепарабельна. Доказать, что $G \subseteq \sigma H \sigma^{-1}$ для некоторой $\sigma \in S_n$ тогда и только тогда, когда R имеет корень в K.