Домашнее задание №4

1. Пусть $f \in K[x]$ — сепарабельный многочлен, $a_1, \ldots, a_n$ — все его корни в поле разложения $L = K(f)$ и $\ell(x_1, \ldots, x_n) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$ ($c_i \in K$) — линейная форма.

   (a) Доказать, что существует такой набор коэффициентов $c_1, \ldots, c_n \in K$, что все значения $\ell(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})$ (по всем $\sigma \in S_n$) попарно различны.

   (b) Рассмотрим многочлен $\tilde{q}(x, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{\sigma \in H}(x - \ell(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})) \in K[x, x_1, \ldots, x_n]$, где $H \subseteq S_n$ — некоторая подгруппа. Доказать, что при некотором значении $x = c \in K$ резольвента R многочлена f относительно H, построенная с помощью многочлена $q(x_1, \ldots, x_n) = \tilde{q}(c, x_1, \ldots, x_n)$, сепарабельна.

2. Вычислить группу Галуа поля разложения многочлена над $\mathbb{Q}$:

   (a) $x^3 + x^2 + 1$;

   (b) $x^3 - 12x + 8$;

   (c) $x^4 + 4x^2 + 9$;

   (d) $x^4 + 3x^3 - 3x + 3$.

3. Пусть $f \in \mathbb{Q}[x]$ — неприводимый многочлен простой степени p, $G \subseteq S_p$ — группа Галуа его поля разложения над $\mathbb{Q}$. Доказать:

   (a) G содержит цикл длины p;

   (b) если среди комплексных корней f ровно два мнимых, то G содержит транспозицию;

   (c) в условиях предыдущего пункта $G = S_p$.

4. Разрешимы ли в радикалах над $\mathbb{Q}$ уравнения:

   (a) $x^5 - 5x + 2 = 0$;

   (b) $x^5 - 5x^2 - 3 = 0$.