Домашнее задание №5

1. Доказать, что группа обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ бесконечна.

2. Пусть $\mathbb{Z}_p$ — множество целых p-адических чисел.

   (a) Доказать, что $\mathbb{Z}_p$ — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей без делителей нуля, содержащее $\mathbb{Z}$.

   (b) Найти группу обратимых элементов $\mathbb{Z}_p^\times$.

   (c) Описать все идеалы в $\mathbb{Z}_p$.

3. Описать все идеалы в алгебре $K[[x]]$.

4. Найти группу обратимых элементов факторалгебры $K[x]/K[x] \cdot x^n$.

5. Пусть A — конечное ассоциативное кольцо. Доказать, что:

   (a) если A не имеет делителей нуля, то A содержит единицу, и все неделители нуля в A обратимы;

   (b) если A содержит единицу, то в нём любой обратимый слева элемент обратим справа и наоборот;

   (c) если A содержит единицу, то в нём любой левый делитель нуля является правым делителем нуля и наоборот.

6. Пусть A — ассоциативное кольцо с единицей и $a, b \in A$. Доказать, что:

   (a) если ab и ba обратимы, то a и b обратимы;

   (b) если A не имеет делителей нуля и ab обратимо, то a и b обратимы;

   (c) в общем случае из обратимости ab не следует обратимость a и b;

   (d) если $1 + ab$ обратим, то $1 + ba$ обратим.

7. Доказать, что если в ассоциативном кольце (или алгебре) с единицей все необратимые элементы образуют аддитивную подгруппу (или подпространство), то это множество — двусторонний идеал. Такие кольца (алгебры) называются *локальными*.

8. Найти все максимальные идеалы в кольце вычетов $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. При каких n это кольцо будет локальным?