

Домашнее задание №6

1. Всякий ли идеал в алгебре непрерывных функций $C[a, b]$ имеет вид

$$I(Y) = \{f \in C[a, b] \mid f|_Y = 0\}$$

для некоторого $Y \subseteq [a, b]$?

2. Найти все двусторонние идеалы в кольце матриц $\text{Mat}_n(A)$ над ассоциативным кольцом A с единицей.
3. Пусть $p_i = \partial/\partial x_i$ и $q_i = (\text{умножение на } x_i)$ — порождающие элементы алгебры Вейля $A_n(K)$ и $f = f(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \in A_n(K)$ — произвольный элемент алгебры Вейля, канонически записанный в виде многочлена от порождающих элементов, т.е. линейной комбинации одночленов вида $q_1^{l_1} \cdots q_n^{l_n} p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$. Доказать, что

$$p_i f - f p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad q_i f - f q_i = -\frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

4. Доказать, что если поле K имеет нулевую характеристику, то любой простой $A_n(K)$ -модуль бесконечномерен над K .
5. (*Лемма Шура для модулей*) Пусть M, N — простые A -модули. Доказать, что любой ненулевой гомоморфизм $\varphi : M \rightarrow N$ является изоморфизмом.
6. (*Китайская теорема об остатках*) Пусть A — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, $I_1, \dots, I_s \triangleleft A$, причём $I_i + I_j = A$ при $i \neq j$. Доказать:
- (a) $I_1 \cdots I_{s-1} + I_s = A$ (под произведением идеалов понимается идеал, состоящий из всевозможных сумм элементов вида $a_1 \cdots a_{s-1}$, $a_i \in I_i$, — почему это идеал?);
 - (b) $I_1 \cap \cdots \cap I_s = I_1 \cdots I_s$;
 - (c) гомоморфизм $\varphi : A \rightarrow A/I_1 \oplus \cdots \oplus A/I_s$, $\varphi(a) = (a + I_1, \dots, a + I_s)$ сюръективен;
 - (d) $A/(I_1 \cdots I_s) \simeq A/I_1 \oplus \cdots \oplus A/I_s$.