Домашнее задание №7

1. Доказать:

   (a) $\mathrm{Mat}_n(K) \otimes_K \mathrm{Mat}_m(K) \simeq \mathrm{Mat}_{nm}(K)$;

   (b) $\mathrm{Mat}_n(K) \otimes_K A \simeq \mathrm{Mat}_n(A)$ для любой ассоциативной алгебры A над полем K;

   (c) $K[x_1, \ldots, x_n] \otimes_K K[y_1, \ldots, y_m] \simeq K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$;

   (d) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$;

   (e) $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$;

   (f) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

2. Пусть M — абелева группа в аддитивной записи, т.е. $\mathbb{Z}$-модуль. Доказать, что $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq M/\operatorname{Tor}(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, где $\operatorname{Tor}(M)$ — *подгруппа кручения* (состоящая из всех элементов конечного порядка в M).

3. Доказать, что линейное отображение $\varphi : \mathrm{Mat}_n(K) \to \mathrm{Mat}_n(K) \otimes_K \mathrm{Mat}_n(K)$, задаваемое на базисе из матричных единиц формулой $\varphi(E_{ij}) = E_{ij} \otimes E_{ij}$, является гомоморфизмом алгебр.

4. Пусть V, W — конечномерные векторные пространства над полем K. Доказать:

   (a) если $V' \subseteq V$, $W' \subseteq W$ — подпространства, то $V' \otimes W'$ канонически вкладывается в $V \otimes W$ в качестве подпространства (тензорные произведения берутся над K);

   (b) если $V'' \subseteq V$, $W'' \subseteq W$ — другой набор подпространств, то

   $$(V' \otimes W') \cap (V'' \otimes W'') = (V' \cap V'') \otimes (W' \cap W'');$$

   (c) любой элемент $u \in V \otimes W$ представим в виде $u = v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \cdots + v_r \otimes w_r$, где обе системы векторов $\{v_1, \ldots, v_r\}$ и $\{w_1, \ldots, w_r\}$ в пространствах V, W линейно независимы;

   (d) число r слагаемых вышеуказанного разложения данного элемента u не зависит от выбора разложения.