

Программа экзамена по курсу “Алгебра, 1-й семестр”
(вечернее отделение), 2015/2016 уч. год.
Лектор Д. А. Тимашёв

1. Системы линейных уравнений, их матрицы. Элементарные преобразования, метод Гаусса решения СЛУ.
2. Векторные пространства: определение и примеры. Линейная зависимость векторов, её свойства.
3. Основная лемма о линейной зависимости. Базис и ранг системы векторов, координаты вектора в базисе. Размерность векторного пространства, стандартный базис и размерность пространства $\mathbb{R}^n$.
4. Ранг матрицы: эквивалентность различных определений, свойства.
5. Теорема Кронекера–Капелли, критерий определённости системы линейных уравнений.
6. Подпространства в векторном пространстве. Линейная оболочка системы векторов. Пространство решений однородной системы линейных уравнений, его размерность, фундаментальная система решений.
7. Структура множества решений неоднородной системы линейных уравнений, связь с ассоциированной однородной СЛУ.
8. Линейные отображения векторных пространств, задание линейного отображения $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ матрицей. Операции над линейными отображениями и матрицами, их свойства.
9. Ранг произведения матриц.
10. Единичная матрица. Обратная матрица: определение, единственность. Невырожденные матрицы, критерий существования обратной матрицы.
11. Алгоритм вычисления обратной матрицы. Элементарные матрицы, их свойства, связь с элементарными преобразованиями. Разложение невырожденной матрицы в произведение элементарных матриц.
12. Перестановки и подстановки, их количество. Умножение подстановок, его свойства. Разложение подстановки в произведение независимых циклов и в произведение транспозиций.
13. Чётность и знак перестановок и подстановок, их свойства.
14. Определитель, его свойства как функции от строк матрицы.
15. Определитель транспонированной матрицы. Свойства определителя как функции от столбцов матрицы.
16. Определитель треугольной матрицы. Вычисление определителя приведением к треугольному виду. Критерий невырожденности матрицы.
17. Определитель матрицы с углом нулей. Определитель Вандермонда.
18. Определитель произведения матриц.
19. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке/столбцу.
20. Лемма о фальшивом разложении определителя. Формула для обратной матрицы.
21. Правило Крамера.
22. Теорема о ранге матрицы. Метод окаймляющих миноров.
23. Группы: определение и примеры. Единственность нейтрального и обратного элементов. Подгруппы.

24. Кольца: определение и примеры. Аддитивная и мультипликативная группы кольца. Делители нуля. Поля: определение и примеры.
25. Кольцо вычетов, делители нуля и обратимые элементы в нём. Когда кольцо вычетов является полем?
26. Характеристика поля. Возведение суммы в степень, равную характеристике. Малая теорема Ферма.
27. Поле комплексных чисел: аксиоматическое определение, существование и единственность. Алгебраическая форма записи комплексных чисел.
28. Комплексная плоскость. Геометрический смысл сложения и вычитания комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа. Операция сопряжения, её свойства.
29. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме, их геометрический смысл. Формула Муавра.
30. Извлечение корней из комплексных чисел. Группа корней из 1, первообразные корни.
31. Кольцо многочленов от одной переменной: аксиоматическое определение, существование и единственность. Степень многочлена, её свойства.
32. Деление с остатком в кольце многочленов от одной переменной над полем. Теорема Безу. Кратность корня многочлена, число корней с учётом кратности.
33. Формальная производная многочлена, её свойства. Критерий кратного корня, определение кратности корня по значениям высших производных. Формула Тейлора.
34. Наибольший общий делитель двух многочленов: определение, существование и единственность. Алгоритм Евклида. Линейное выражение НОД через исходные многочлены.
35. Неприводимые многочлены. Разложение многочлена на неприводимые множители.
36. Основные понятия математического анализа над полем комплексных чисел. Лемма о неограниченном возрастании модуля многочлена.
37. Лемма Даламбера.
38. Основная теорема алгебры комплексных чисел. Разложение на неприводимые множители многочленов над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$.
39. Поле частных коммутативного кольца без делителей нуля. Поле рациональных дробей, однозначное представление его элементов несократимыми дробями. Правильные дроби, однозначное представление рациональной дроби в виде суммы многочлена и правильной дроби.
40. Простейшие дроби, их вид над полями $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$. Разложение правильной дроби в сумму простейших дробей.
41. Кольцо многочленов от нескольких переменных: определение, существование и единственность. Степень одночлена и многочлена, разложение многочлена на однородные компоненты. Лексикографический порядок, его свойства. Старший член произведения многочленов.
42. Симметрические многочлены: определение и примеры. Элементарные симметрические многочлены. Теорема Виета.
43. Основная теорема о симметрических многочленах.
44. Дискриминант.

Список литературы

- [1] А. И. Кострикин, *Введение в алгебру, ч. I: Основы алгебры*, М., Физматлит, 2000.
- [2] Э. Б. Винберг, *Курс алгебры*, М., Факториал Пресс, 2002.
- [3] А. Г. Курош, *Курс высшей алгебры*, М., Наука, 1971.
- [4] *Сборник задач по алгебре* (под ред. А. И. Кострикина), М., Физматлит, 2001.