

**Программа экзамена по алгебре,  
2 курс, 1 поток, осень 2019 г.  
Лектор Д. А. Тимашёв**

1. Нормальные подгруппы. Факторгруппы.
2. Гомоморфизмы групп, их ядра и образы. Основная теорема о гомоморфизмах групп.
3. Произведение подгрупп, одна из которых нормальна, факторизация по нормальному множителю.
4. Автоморфизмы групп. Автоморфизмы циклической группы. Внутренние автоморфизмы, центр группы.
5. Прямое произведение (прямая сумма) групп — внутреннее и внешнее, их эквивалентность.
6. Китайская теорема об остатках.
7. Факторизация прямого произведения групп по прямому произведению подгрупп и по сомножителям.
8. Системы порождающих в группе. Порождающие групп  $S_n$ ,  $A_n$ ,  $GL_n(K)$ ,  $SL_n(K)$ .
9. Конечно порождённые и свободные абелевы группы. Ранг свободной группы. Изоморфизм свободных групп одного ранга.
10. Свободность и ранг подгруппы в свободной абелевой группе. Дискретные подгруппы и решётки в евклидовом пространстве.
11. Существование базиса свободной абелевой группы, согласованного с подгруппой.
12. Универсальное свойство свободной группы. Разложение конечно порождённой абелевой группы в прямую сумму примарных и бесконечных циклических групп: существование.
13. Разложение конечно порождённой абелевой группы в прямую сумму примарных и бесконечных циклических групп: единственность.
14. Экспонента группы, критерий цикличности конечной абелевой группы в терминах экспоненты. Цикличность конечной подгруппы в мультипликативной группе поля.
15. Действия групп на множествах: эквивалентность двух определений, примеры. Теорема Кэли.
16. Орбиты и стабилизаторы, разбиение множества на орбиты под действием группы, сопряжённость стабилизаторов точек из одной орбиты.
17. Биекция между орбитой и множеством смежных классов по стабилизатору. Число элементов в орбите действия конечной группы. Группа вращений куба. Эпиморфизм  $S_4 \rightarrow S_3$ .
18. Действие группы на себе сопряжениями. Классы сопряжённости и централизаторы. Классы сопряжённости и центр группы  $S_n$ .
19. Число элементов в классе сопряжённости в конечной группе, формула классов. Нетривиальность центра конечной  $p$ -группы. Группы порядка  $p^2$  (где  $p$  — простое число).
20. Коммутаторы элементов и коммутант группы, его свойства.
21. Коммутанты групп  $S_n$ ,  $A_n$  (при  $n \geq 5$ ),  $GL_n(K)$ ,  $SL_n(K)$ .
22. Кратные коммутанты, их свойства. Разрешимые группы, критерий разрешимости. При каких  $n$  группа  $S_n$  разрешима?
23. Неразрешимость групп  $GL_n(K)$  и  $SL_n(K)$ . Разрешимость группы треугольных матриц и конечных  $p$ -групп.
24. Простые группы, случай абелевых групп. Простота группы  $A_n$  при  $n \geq 5$ .
25. Простота группы  $SO_3(\mathbb{R})$ .
26. Силовские подгруппы. Первая теорема Силова.
27. Вторая теорема Силова. Критерий нормальности силовской подгруппы.
28. Нормализатор подгруппы. Третья теорема Силова.
29. Группы порядка  $pq$  (где  $p$  и  $q$  — различные простые числа).
30. Линейные и матричные представления групп: определение и примеры. Регулярное представление. Гомоморфизмы и изоморфизмы представлений.

31. Инвариантные подпространства. Приводимые, вполне приводимые, неприводимые представления. Прямая сумма представлений, разложение вполне приводимого представления на неприводимые.
32. Теорема Машке. Разложение мономиального представления группы  $S_n$  в прямую сумму неприводимых представлений.
33. Ортогональные и унитарные представления, их полная приводимость. Ортогонализуемость (унитаризуемость) вещественных (комплексных) представлений конечных групп.
34. Инвариантность ядра и образа гомоморфизма представлений. Лемма Шура. Усреднение линейного отображения по группе.
35. Кратность неприводимого представления во вполне приводимом комплексном представлении.
36. Неприводимые комплексные представления абелевых групп, их описание для конечных абелевых групп.
37. Одномерные представления групп. Число одномерных комплексных представлений конечной группы. Одномерные представления группы  $S_n$ .
38. Кратности неприводимых комплексных представлений конечной группы в её регулярном представлении. Сумма квадратов размерностей неприводимых представлений.
39. Матричные элементы линейных представлений. Разложение пространства комплексных функций на конечной группе в прямую сумму пространств матричных элементов неприводимых комплексных представлений.
40. Центральные функции на группе и характеры линейных представлений. Характеры неприводимых комплексных представлений конечной группы образуют базис пространства центральных функций. Число неприводимых представлений.
41. Эрмитова структура на пространстве комплексных функций на конечной группе, соотношения ортогональности для матричных элементов и характеров неприводимых представлений. Кратность неприводимого представления как скалярное произведение характеров.
42. Неприводимые представления группы  $S_n$  при  $n \leq 4$ .
43. Алгебры: определение и примеры. Структурные константы. Групповая алгебра. Алгебра кватернионов. Тела и алгебры с делением.
44. Идеалы в кольцах и алгебрах. Факторкольца и факторалгебры.
45. Гомоморфизмы колец и алгебр, их ядра и образы, основная теорема о гомоморфизмах.
46. Прямая сумма колец и алгебр. Китайская теорема об остатках для колец вычетов. Явная формула для функции Эйлера.
47. Простые кольца и алгебры. Критерий простоты коммутативного ассоциативного кольца с 1. Простота алгебры матриц.
48. Идеал, порождённый семейством элементов коммутативного кольца. Главные идеалы. Кольца главных идеалов: определение и примеры.
49. Факторалгебры алгебры многочленов от одной переменной.
50. Алгебраические и трансцендентные элементы в ассоциативной алгебре с 1. Минимальный многочлен алгебраического элемента.
51. Присоединение к полю корня неприводимого многочлена.
52. Конечные и конечно порождённые расширения полей. Степень расширения, теорема о башне.
53. Алгебраическое замыкание поля в его расширении. Поле алгебраических чисел.
54. Поле разложения многочлена.
55. Простые поля, их структура. Простое подполе данного поля.
56. Конечные поля, их классификация.
57. Построение конечных полей присоединением к  $\mathbb{Z}_p$  корня неприводимого многочлена. Поле из 4 элементов. Вложения конечных полей.
58. Конечномерные алгебры с делением. Теорема Фробениуса.

## Список литературы

- [1] А. И. Кострикин, *Введение в алгебру*, ч. I: *Основы алгебры*, М., Физматлит, 2000.
- [2] А. И. Кострикин, *Введение в алгебру*, ч. III: *Основные структуры*, М., Физматлит, 2001.
- [3] Э. Б. Винберг, *Курс алгебры*, М., Факториал Пресс, 2002, гл. 1, 4, 9–11.
- [4] *Сборник задач по алгебре* (под ред. А. И. Кострикина), М., Физматлит, 2001.