

Программа экзамена по алгебре
1 курс, 1 поток, осень 2020 г., лектор Д. А. Тимашёв

1. Системы линейных уравнений (СЛУ), их матрицы. Элементарные преобразования СЛУ и матриц, их свойства.
2. Метод Гаусса решения СЛУ. Однородная СЛУ, в которой уравнений меньше, чем неизвестных, имеет ненулевое решение.
3. Векторные пространства: определение и примеры. Линейная зависимость векторов, её свойства.
4. Основная лемма о линейной зависимости.
5. Базис и ранг системы векторов, координаты вектора в базисе. Размерность векторного пространства, стандартный базис и размерность пространства \mathbb{R}^n .
6. Ранг матрицы: эквивалентность различных определений, свойства.
7. Теорема Кронекера–Капелли, критерий определённости системы линейных уравнений.
8. Подпространства в векторном пространстве. Линейная оболочка системы векторов. Пространство решений однородной системы линейных уравнений, его размерность, фундаментальная система решений.
9. Структура множества решений неоднородной системы линейных уравнений, связь с ассоциированной однородной СЛУ.
10. Линейные отображения векторных пространств, задание линейного отображения $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ матрицей.
11. Операции над линейными отображениями и матрицами, их свойства. Матричная запись системы линейных уравнений.
12. Матричные операции и транспонирование.
13. Ранг произведения матриц.
14. Единичная матрица. Обратная матрица: определение, единственность. Невырожденные матрицы, критерий существования обратной матрицы.
15. Алгоритм вычисления обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.
16. Элементарные матрицы, их свойства, связь с элементарными преобразованиями. Разложение невырожденной матрицы в произведение элементарных матриц.
17. Перестановки и подстановки, их количество. Умножение подстановок, его свойства. Разложение подстановки в произведение независимых циклов и в произведение транспозиций.
18. Чётность и знак перестановок и подстановок, их свойства.
19. Определитель, его свойства как функции от строк матрицы.
20. Определитель транспонированной матрицы. Свойства определителя как функции от столбцов матрицы.
21. Определитель треугольной матрицы. Вычисление определителя приведением к треугольному виду. Критерий невырожденности матрицы.
22. Определитель матрицы с углом нулей.
23. Определитель Вандермонда.
24. Определитель произведения матриц.
25. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке/столбцу.
26. Лемма о фальшивом разложении определителя. Формула для обратной матрицы.
27. Правило Крамера.
28. Теорема о ранге матрицы. Метод окаймляющих миноров.
29. Группы: определение и примеры. Единственность нейтрального и обратного элементов. Подгруппы.
30. Кольца: определение и примеры. Аддитивная и мультипликативная группы кольца. Делители нуля. Поля: определение и примеры.

31. Кольцо вычетов, делители нуля и обратимые элементы в нём. Когда кольцо вычетов является полем?
32. Характеристика поля. Возведение суммы в степень, равную характеристике. Малая теорема Ферма.
33. Поле комплексных чисел: аксиоматическое определение, существование и единственность. Алгебраическая форма записи комплексных чисел.
34. Комплексная плоскость. Модуль и аргумент комплексного числа. Операция сопряжения, её свойства. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Операции умножения и деления в тригонометрической форме. Формула Муавра.
35. Извлечение корней из комплексных чисел. Группа корней из 1, первообразные корни.
36. Кольцо многочленов от одной переменной: аксиоматическое определение, существование и единственность. Степень многочлена, её свойства.
37. Полиномиальная интерполяция, интерполяционная формула Лагранжа. Формальное и функциональное равенство многочленов от одной переменной.
38. Деление с остатком в кольце многочленов от одной переменной над полем. Теорема Безу. Кратность корня многочлена, число корней с учётом кратности.
39. Формальная производная многочлена, её свойства. Критерий кратного корня, определение кратности корня по значениям высших производных. Формула Тейлора.
40. Наибольший общий делитель (НОД) двух элементов области целостности, его единственность. Евклидовы кольца. Существование НОД в евклидовых кольцах, алгоритм Евклида, линейное выражение НОД через исходные элементы.
41. Простые элементы в области целостности, неприводимые многочлены. Факториальные кольца, факториальность евклидовых колец.
42. Основные понятия и факты математического анализа над полем комплексных чисел. Лемма о неограниченном возрастании модуля многочлена. Лемма Д'Аламбера.
43. Основная теорема алгебры комплексных чисел. Разложение на неприводимые множители многочленов над \mathbb{C} и над \mathbb{R} .
44. Теорема Декарта.
45. Избавление от кратных корней многочлена.
46. Поле дробей области целостности. Поле рациональных дробей, однозначное представление его элементов несократимыми дробями. Правильные дроби, однозначное представление рациональной дроби в виде суммы многочлена и правильной дроби.
47. Простейшие дроби, их вид над полями \mathbb{C} и \mathbb{R} . Разложение правильной дроби в сумму простейших дробей.
48. Кольцо многочленов от нескольких переменных: определение, существование и единственность. Формальное и функциональное равенство многочленов от нескольких переменных.
49. Степень одночлена и многочлена, разложение многочлена на однородные компоненты. Лексикографический порядок, его свойства. Старший член произведения многочленов.
50. Примитивные многочлены, лемма Гаусса. Факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом и кольца многочленов от нескольких переменных над полем.
51. Симметрические многочлены: определение и примеры. Элементарные симметрические многочлены. Теорема Виета.
52. Основная теорема о симметрических многочленах.
53. Дискриминант многочлена, его свойства. Дискриминант кубического трёхчлена.
54. Результант двух многочленов, его свойства, выражение через определитель. Связь дискриминанта с результатом.
55. Порядок элемента в группе, его свойства. Циклические группы и их подгруппы. Изоморфизм циклических групп одного порядка.
56. Смежные классы в группе по подгруппе. Теорема Лагранжа и её следствия. Теорема Эйлера.

Список литературы

- [1] А. И. Кострикин, *Введение в алгебру, ч. I: Основы алгебры*, М., Физматлит, 2000.
- [2] Э. Б. Винберг, *Курс алгебры*, М., Факториал Пресс, 2002.
- [3] А. Г. Курош, *Курс высшей алгебры*, М., Наука, 1971.
- [4] *Сборник задач по алгебре* (под ред. А. И. Кострикина), М., Физматлит, 2001.