

**Программа экзамена по алгебре,  
3 курс, поток ФММФ, 341 группа, осень 2022 г.  
Лектор Д. А. Тимашёв**

1. Конечные расширения полей и их автоморфизмы. Порядок группы автоморфизмов не превосходит степени расширения.
2. Расширения Галуа полей.
3. Сепарабельные и нормальные расширения полей, поля разложения, связь с расширениями Галуа.
4. Основная теорема теории Галуа. Теорема о примитивном элементе.
5. Радикальные расширения полей и разрешимость алгебраических уравнений в радикалах. Всякое радикальное расширение содержится в радикальном расширении Галуа.
6. Критерий Галуа разрешимости алгебраического уравнения в радикалах.
7. Разрешимость в радикалах общего алгебраического уравнения степени  $n$ .
8. Модули над ассоциативными кольцами и алгебрами: определение и примеры. Подмодули и фактормодули, гомоморфизмы и эндоморфизмы модулей.
9. Прямые суммы колец, алгебр и модулей.
10. Тензорное произведение модулей.
11. Свойства тензорного произведения. Тензорное произведение колец и алгебр.
12. Конечно порождённые, циклические, свободные и нётеровы модули.
13. Нётеровы кольца и алгебры. Теорема Гильберта о базисе идеала.
14. Кольца главных идеалов: определение и примеры. Разложение на простые множители в кольце главных идеалов.
15. Подмодули в свободных модулях над кольцом главных идеалов, теорема о согласованных базисах.
16. Структура конечно порождённых модулей над кольцом главных идеалов, ранг, инвариантные множители и элементарные делители.
17. Структура конечно порождённых абелевых групп. Нормальные формы Фробениуса и Жордана линейного оператора.
18. Линейные и матричные представления алгебраических структур. Инвариантные подпространства, приводимые, неприводимые и вполне приводимые представления.
19. Лемма Шура. Кратности неприводимых представлений и изотипные компоненты вполне приводимого представления.
20. Тензорное произведение линейных представлений групп. Неприводимые представления прямого произведения групп.
21. Нильпотентные алгебры, радикал конечномерной ассоциативной алгебры.
22. Стандартное скалярное умножение на конечномерной ассоциативной алгебре, связь с радикалом.
23. Полупростые алгебры, разложение в прямую сумму простых алгебр.
24. Теоремы Бернсайда и Веддербёрна.
25. Теорема Веддербёрна–Артина. Критерий полупростоты ассоциативной алгебры в терминах её линейных представлений, описание неприводимых представлений.
26. Представления конечных групп с точки зрения ассоциативных алгебр: полупростота групповой алгебры, её центр, количество и сумма квадратов размерностей неприводимых представлений.
27. Линейные группы Ли: определение и примеры. Подгруппа в  $GL_n$ , являющаяся подмногообразием в окрестности какой-либо своей точки, является группой Ли.
28. Замкнутость подгрупп Ли в  $GL_n$ . Связные компоненты группы Ли. Связная группа Ли порождается любой окрестностью единицы.
29. Касательная алгебра Ли линейной группы Ли.
30. Экспоненциальное отображение в группах Ли, его свойства.
31. Соответствие между группами Ли и их алгебрами Ли: связные подгруппы Ли и подалгебры Ли, пересечение подгрупп Ли, коммутативность.

32. Линейные представления групп Ли и алгебр Ли, их связь. Присоединённое представление.
33. Двулистные накрытия  $SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow SO_3(\mathbb{R})$  и  $SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow SO_3(\mathbb{C})$ .
34. Восстановление линейного представления связной группы Ли по своему дифференциалу с помощью эксп, совпадение их теоретико-представленческих свойств.
35. Ортогонализуемость/унитаризуемость и полная приводимость линейных представлений компактных групп Ли.
36. Линейные представления групп Ли  $\mathbb{R}$  и  $SO_2(\mathbb{R})$ , разложение Фурье многочленов на окружности.
37. Вещественные формы комплексных групп Ли и их линейные представления. Унитарный трюк Г. Вейля, редуктивные группы.
38. Линейные представления алгебры Ли  $\mathfrak{sl}_2$  и групп Ли  $SL_2$ ,  $SU_2$ ,  $SO_3$ .
39. Гармонический анализ на двумерной сфере, сферические функции Лапласа.
40. Универсальная обёртывающая алгебра Ли.
41. Теорема Пуанкаре–Биркгофа–Витта.
42. Алгебра Клиффорда векторного пространства с квадратичной формой, её структура, базис и размерность.
43. Центральная простота алгебры Клиффорда или её чётной части. Спинорные и полуспинорные представления алгебр Клиффорда.
44. Спинорная группа, двулистное накрытие  $\text{Spin}(V) \rightarrow SO(V)$ .

## Список литературы

- [1] Ю. А. Бахтурин, *Основные структуры современной алгебры*, М., Наука, 1990.
- [2] Ю. А. Ван дер Варден, *Алгебра*, М., Наука, 1979.
- [3] Э. Б. Винберг, *Линейные представления групп*, М., Наука, 1985.
- [4] Э. Б. Винберг, *Курс алгебры*, М., МЦНМО, 2017.
- [5] А. И. Кострикин, *Введение в алгебру, ч. III: Основные структуры алгебры*, М., Физматлит, 2001.
- [6] И. Ламбек, *Кольца и модули*, М., Мир, 1971.
- [7] С. Ленг, *Алгебра*, М., Мир, 1968.
- [8] М. М. Постников, *Теория Галуа*, М., Факториал Пресс, 2003.
- [9] В. В. Прасолов, *Многочлены*, М., МЦНМО, 2014.
- [10] D. J. H. Garling, *Clifford algebras: an introduction*, Cambridge University Press, 2011.
- [11] Сборник задач по алгебре (под ред. А. И. Кострикина), М., МЦНМО, 2009.