

**Программа экзамена по алгебре,
2 курс, поток ФММФ, 241 группа, весна 2024 г.
Лектор Д. А. Тимашёв**

1. Модули над ассоциативными кольцами и алгебрами: определение и примеры. Подмодули и фактормодули, гомоморфизмы и эндоморфизмы модулей.
2. Прямые суммы колец, алгебр и модулей.
3. Тензорное произведение модулей.
4. Свойства тензорного произведения модулей.
5. Тензорное произведение векторных пространств, колец и алгебр.
6. Конечно порождённые, циклические, свободные и нётеровы модули.
7. Нётеровы кольца и алгебры. Теорема Гильберта о базисе идеала.
8. Подмодули в свободных модулях над кольцом главных идеалов, теорема о согласованных базисах.
9. Структура конечно порождённых модулей над кольцом главных идеалов, ранг, инвариантные множители и элементарные делители.
10. Нормальные формы Фробениуса и Жордана линейного оператора.
11. Линейные и матричные представления алгебраических структур. Инвариантные подпространства, приводимые, неприводимые и вполне приводимые представления.
12. Гомоморфизмы линейных представлений. Лемма Шура.
13. Кратности неприводимых представлений и изотипные компоненты вполне приводимого представления.
14. Нильпотентные алгебры, радикал конечномерной ассоциативной алгебры.
15. Стандартное скалярное умножение на конечномерной ассоциативной алгебре, связь с радикалом.
16. Полупростые алгебры, разложение в прямую сумму простых алгебр.
17. Теоремы Бернсайда и Веддербёрна.
18. Теорема Веддербёрна–Артина. Критерий полупростоты ассоциативной алгебры в терминах её линейных представлений, описание неприводимых представлений.
19. Линейные представления групп: определение и примеры. Групповая алгебра и регулярное представление.
20. Сопряжённое представление и тензорное произведение линейных представлений групп. Неприводимые представления прямого произведения групп.
21. Неприводимые представления абелевых групп. Одномерные представления групп, их описание для конечных групп.
22. Ортогональные и унитарные представления, их полная приводимость. Полупростота групповой алгебры и теорема Машке о полной приводимости линейных представлений конечной группы над полем характеристики 0.
23. Центр групповой алгебры конечной группы, количество и сумма квадратов размерностей комплексных неприводимых представлений. Матричные элементы линейных представлений и пространство функций на конечной группе.
24. Центральные функции на группе и характеры линейных представлений. Характеры неприводимых комплексных представлений конечной группы образуют ортонормированный базис пространства центральных функций. Определяемость линейного представления своим характером.
25. Мономиальное представление группы S_n , его разложение на неприводимые слагаемые. Неприводимые представления группы S_n при $n \leq 4$.
26. Линейные группы Ли: определение и примеры. Подгруппа в GL_n , являющаяся подмножеством в окрестности какой-либо своей точки, является группой Ли.
27. Замкнутость подгрупп Ли в GL_n . Связная группа Ли порождается любой окрестностью единицы.
28. Касательная алгебра Ли линейной группы Ли.
29. Экспоненциальное отображение в группах Ли, его свойства.

30. Линейные представления групп Ли и алгебр Ли, их связь, совпадение теоретико-представленческих свойств. Линейные представления аддитивной группы Ли поля \mathbb{R} или \mathbb{C} .
31. Ортогонализуемость/унитаризуемость и полная приводимость линейных представлений компактных групп Ли.
32. Линейные представления группы Ли $U_1(\mathbb{C}) \simeq SO_2(\mathbb{R})$, разложение Фурье многочленов на окружности.
33. Вещественные формы комплексных групп Ли и их линейные представления. Унитарный триок Г. Вейля, редуктивные группы.
34. Линейные представления алгебры Ли \mathfrak{sl}_2 и групп Ли SL_2, SU_2 .
35. Двумерные накрытия $SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow SO_3(\mathbb{R})$ и $SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow SO_3(\mathbb{C})$. Линейные представления группы Ли SO_3 .
36. Гармонический анализ на двумерной сфере, сферические функции Лапласа.
37. Универсальная обёртывающая алгебры Ли.
38. Теорема Пуанкаре–Биркгофа–Витта.
39. Алгебра Клиффорда векторного пространства с квадратичной формой, её структура, базис и размерность.
40. Центральная простота алгебры Клиффорда или её чётной части.
41. Спинорные и полуспинорные представления алгебр Клиффорда.
42. Спинорная группа, двумерное накрытие $\text{Spin}(V) \rightarrow SO(V)$.

Список литературы

- [1] Ю. А. Бахтурин, *Основные структуры современной алгебры*, М., Наука, 1990.
- [2] Б. Л. Ван дер Варден, *Алгебра*, М., Наука, 1979.
- [3] Э. Б. Винберг, *Линейные представления групп*, М., Наука, 1985.
- [4] Э. Б. Винберг, *Курс алгебры*, М., МЦНМО, 2017.
- [5] А. И. Кострикин, *Введение в алгебру*, ч. III: *Основные структуры алгебры*, М., Физматлит, 2001.
- [6] И. Ламбек, *Кольца и модули*, М., Мир, 1971.
- [7] С. Ленг, *Алгебра*, М., Мир, 1968.
- [8] Ж.-П. Серр, *Линейные представления конечных групп*, М., Мир, 1970.
- [9] D. J. N. Garling, *Clifford algebras: an introduction*, Cambridge University Press, 2011.
- [10] *Сборник задач по алгебре* (под ред. А. И. Кострикина), М., МЦНМО, 2009.