

**Программа экзамена по курсу «Алгебра, 3-й семестр»
(вечернее отделение), 2014/2015 уч. год.
Лектор Д. А. Тимашёв**

1. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп: определение, примеры, простейшие свойства.
2. Порядок элемента в группе, его свойства.
3. Циклические группы и их подгруппы. Изоморфизм циклических групп одного порядка.
4. Смежные классы в группе по подгруппе. Теорема Лагранжа и её следствия.
5. Нормальные подгруппы. Факторгруппы.
6. Ядра и образы гомоморфизмов. Основная теорема о гомоморфизмах групп.
7. Автоморфизмы групп. Автоморфизмы циклической группы. Внутренние автоморфизмы.
8. Прямое произведение (прямая сумма) групп — внутреннее и внешнее, их эквивалентность.
9. Разложение циклической группы в прямую сумму примарных циклических групп.
10. Факторизация прямого произведения групп по прямому произведению подгрупп.
11. Системы порождающих в группе. Порождающие групп S_n , A_n , $GL_n(K)$, $SL_n(K)$.
12. Конечнопорождённые и свободные абелевы группы. Ранг свободной группы. Изоморфизм свободных групп одного ранга.
13. Свободность и ранг подгруппы в свободной абелевой группе.
14. Существование базиса свободной абелевой группы, согласованного с подгруппой.
15. Универсальное свойство свободной группы. Разложение конечнопорожденной абелевой группы в прямую сумму примарных и бесконечных циклических групп: существование.
16. Разложение конечнопорожденной абелевой группы в прямую сумму примарных и бесконечных циклических групп: единственность.
17. Действия групп на множествах: эквивалентность двух определений, примеры.
18. Теорема Кэли.
19. Орбиты действия, разбиение множества на орбиты под действием группы.
20. Стабилизаторы, их свойства. Сопряжённость стабилизаторов точек из одной орбиты.
21. Биекция между орбитой и множеством смежных классов по стабилизатору. Число элементов в орбите действия конечной группы.
22. Группа вращений куба. Эпиморфизм $S_4 \rightarrow S_3$.
23. Действие группы на себе сопряжениями. Классы сопряжённости и централизаторы. Центр группы. Формула классов.
24. Классы сопряжённости в группе S_n .
25. Нетривиальность центра конечной p -группы. Группы порядка p^2 (где p — простое число).
26. Коммутант группы, его свойства.
27. Коммутанты групп S_n , $GL_n(K)$, $SL_n(K)$.
28. Кратные коммутанты, их свойства.
29. Разрешимые группы, критерий разрешимости. Разрешимость p -групп.
30. Неразрешимость групп $GL_n(K)$ и $SL_n(K)$. Разрешимость группы треугольных матриц.

31. Простые группы. Простота группы A_n при $n \geq 5$. Разрешимость и неразрешимость групп S_n при разных n .
32. Простота группы $SO_3(\mathbb{R})$.
33. Силовские подгруппы. Первая теорема Силова.
34. Вторая теорема Силова. Критерий нормальности силовской подгруппы.
35. Нормализатор подгруппы. Третья теорема Силова.
36. Группы порядка pq (где p и q — различные простые числа).
37. Алгебры: определение и примеры. Структурные константы. Алгебра кватернионов.
38. Идеалы в кольцах и алгебрах. Факторкольца и факторалгебры.
39. Гомоморфизмы колец и алгебр, их ядра и образы, основная теорема о гомоморфизмах.
40. Простые кольца и алгебры. Критерий простоты коммутативного ассоциативного кольца с 1. Простота алгебры матриц.
41. Кольца главных идеалов: определение и примеры.
42. Факторалгебры алгебры многочленов от одной переменной.
43. Алгебраические и трансцендентные элементы в ассоциативной алгебре с 1. Минимальный многочлен.
44. Присоединение к полю корня неприводимого многочлена.
45. Конечные расширения полей. Степень расширения, теорема о башне.
46. Алгебраическое замыкание поля в его расширении. Поле алгебраических чисел.
47. Поле разложения многочлена: существование и единственность.
48. Простые поля, их структура. Существование и единственность простого подполя в каждом поле.
49. Конечные поля, их классификация. Вложения конечных полей.
50. Цикличность мультипликативной группы конечного поля. Построение конечных полей присоединением к \mathbb{Z}_p корня неприводимого многочлена. Построение поля из 4 элементов.
51. Конечномерные алгебры с делением. Теорема Фробениуса.
52. Линейные и матричные представления групп: определение и примеры.
53. Инвариантные подпространства. Приводимые, вполне приводимые и неприводимые представления. Разложение вполне приводимого представления в прямую сумму неприводимых.
54. Разложение мономиального представления группы S_n в прямую сумму неприводимых.
55. Гомоморфизмы линейных представлений. Лемма Шура.
56. Теорема Машке.
57. Неприводимые комплексные представления конечных абелевых групп.
58. Одномерные комплексные представления групп. Факты о количестве и размерностях комплексных линейных представлений конечной группы (без доказательства).

Список литературы

- [1] А. И. Кострикин, *Введение в алгебру, ч. I: Основы алгебры*, М., Физматлит, 2000, гл. 4.
- [2] Э. Б. Винберг, *Курс алгебры*, М., Факториал Пресс, 2002, гл. 1, 4, 9–11.
- [3] А. И. Кострикин, *Введение в алгебру, ч. III: Основные структуры*, М., Физматлит, 2001.
- [4] *Сборник задач по алгебре* (под ред. А. И. Кострикина), М., Физматлит, 2001, ч. III.