

Вопросы к коллоквиуму по алгебре,

1 курс, 1 поток, осень 2020 г.

Лектор Д. А. Тимашёв

1. Системы линейных уравнений (СЛУ), их матрицы. Элементарные преобразования СЛУ и матриц, их свойства.
2. Метод Гаусса решения СЛУ. Однородная СЛУ, в которой уравнений меньше, чем неизвестных, имеет ненулевое решение.
3. Векторные пространства: определение и примеры. Линейная зависимость векторов, её свойства.
4. Основная лемма о линейной зависимости.
5. Базис и ранг системы векторов, координаты вектора в базисе. Размерность векторного пространства, стандартный базис и размерность пространства \mathbb{R}^n .
6. Ранг матрицы: эквивалентность различных определений, свойства.
7. Теорема Кронекера–Капелли, критерий определённости системы линейных уравнений.
8. Подпространства в векторном пространстве. Линейная оболочка системы векторов. Пространство решений однородной системы линейных уравнений, его размерность, фундаментальная система решений.
9. Структура множества решений неоднородной системы линейных уравнений, связь с ассоциированной однородной СЛУ.
10. Линейные отображения векторных пространств, задание линейного отображения $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ матрицей.
11. Операции над линейными отображениями и матрицами, их свойства. Матричная запись системы линейных уравнений.
12. Ранг произведения матриц.
13. Единичная матрица. Обратная матрица: определение, единственность. Невырожденные матрицы, критерий существования обратной матрицы.
14. Алгоритм вычисления обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.
15. Элементарные матрицы, их свойства, связь с элементарными преобразованиями. Разложение невырожденной матрицы в произведение элементарных матриц.
16. Перестановки и подстановки, их количество. Умножение подстановок, его свойства. Разложение подстановки в произведение независимых циклов и в произведение транспозиций.
17. Чётность и знак перестановок и подстановок, их свойства.
18. Определитель, его свойства как функции от строк матрицы.
19. Определитель транспонированной матрицы. Свойства определителя как функции от столбцов матрицы.
20. Определитель треугольной матрицы. Вычисление определителя приведением к треугольному виду. Критерий невырожденности матрицы.
21. Определитель матрицы с углом нулей.
22. Определитель Вандермонда.
23. Определитель произведения матриц.
24. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке/столбцу.
25. Лемма о фальшивом разложении определителя. Формула для обратной матрицы.
26. Правило Крамера.
27. Теорема о ранге матрицы. Метод окаймляющих миноров.