

**Вопросы к коллоквиуму по алгебре,  
2 курс, 1 поток, осень 2021 г.  
Лектор Д. А. Тимашёв**

1. Нормальные подгруппы. Факторгруппы.
2. Гомоморфизмы групп, их ядра и образы. Основная теорема о гомоморфизмах групп.
3. Произведение подгрупп, одна из которых нормальна, факторизация по нормальному множителю.
4. Автоморфизмы групп. Автоморфизмы циклической группы. Внутренние автоморфизмы, центр группы.
5. Прямое произведение (прямая сумма) групп — внутреннее и внешнее, их эквивалентность.
6. Китайская теорема об остатках.
7. Факторизация прямого произведения групп по прямому произведению подгрупп и по сомножителям.
8. Системы порождающих в группе. Порождающие групп  $S_n$ ,  $A_n$ ,  $GL_n(K)$ ,  $SL_n(K)$ .
9. Конечно порождённые и свободные абелевы группы. Ранг свободной группы. Изоморфизм свободных групп одного ранга.
10. Свободность и ранг подгруппы в свободной абелевой группе. Дискретные подгруппы и решётки в евклидовом пространстве.
11. Существование базиса свободной абелевой группы, согласованного с подгруппой.
12. Универсальное свойство свободной группы. Разложение конечно порождённой абелевой группы в прямую сумму примарных и бесконечных циклических групп: существование.
13. Разложение конечно порождённой абелевой группы в прямую сумму примарных и бесконечных циклических групп: единственность.
14. Экспонента группы, критерий цикличности конечной абелевой группы в терминах экспоненты. Цикличность конечной подгруппы в мультипликативной группе поля.
15. Действия групп на множествах: эквивалентность двух определений, примеры. Теорема Кэли.
16. Орбиты и стабилизаторы, разбиение множества на орбиты под действием группы, сопряжённость стабилизаторов точек из одной орбиты.
17. Биекция между орбитой и множеством смежных классов по стабилизатору. Число элементов в орбите действия конечной группы. Группа вращений куба. Эпиморфизм  $S_4 \rightarrow S_3$ .
18. Действие группы на себе сопряжениями. Классы сопряжённости и централизаторы. Классы сопряжённости и центр группы  $S_n$ .
19. Число элементов в классе сопряжённости в конечной группе, формула классов. Нетривиальность центра конечной  $p$ -группы. Группы порядка  $p^2$  (где  $p$  — простое число).
20. Коммутаторы элементов и коммутант группы, его свойства.
21. Коммутанты групп  $S_n$ ,  $A_n$  (при  $n \geq 5$ ),  $GL_n(K)$ ,  $SL_n(K)$ .
22. Кратные коммутанты, их свойства. Разрешимые группы, критерий разрешимости. При каких  $n$  группа  $S_n$  разрешима?
23. Неразрешимость групп  $GL_n(K)$  и  $SL_n(K)$ . Разрешимость группы треугольных матриц и конечных  $p$ -групп.
24. Простые группы, случай абелевых групп. Простота группы  $A_n$  при  $n \geq 5$ .
25. Простота группы  $SO_3(\mathbb{R})$ .
26. Силовские подгруппы. Первая теорема Силова.
27. Вторая теорема Силова. Критерий нормальности силовской подгруппы.
28. Нормализатор подгруппы. Третья теорема Силова.
29. Группы порядка  $pq$  (где  $p$  и  $q$  — различные простые числа).