Структура конечно порождённых модулей над кольцом главных идеалов: доказательство единственности набора инвариантных множителей

Обозначения: M — конечно порождённый модуль над кольцом главных идеалов A;

$$M \simeq A/Au_1 \oplus \cdots \oplus A/Au_m \oplus A \oplus \cdots \oplus A,$$

где $u_1|u_2|\ldots|u_m$, u_i не равны 0 и необратимы. Требуется доказать, что набор $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ определён однозначно с точностью до умножения u_i на обратимые элементы.

Как было показано на лекции, без ограничения общности можно считать, что в разложении отсутствует свободная часть: $M \simeq A/Au_1 \oplus \cdots \oplus A/Au_m$. Кроме того, идеал Au_m — наименьший из аннуляторов элементов модуля M (т.е. аннулятор всего модуля M). Поэтому элемент u_m определён однозначно с точностью до обратимого множителя.

Будем вести индукцию по числу простых множителей в разложении u_m.

Лемма 1. *$p \in A$ — простой элемент $\implies$ A/Ap — поле.*

Доказательство. Было на лекции. □

Лемма 2. *$p \in A$ — простой элемент $\implies$*

$$A/Au \otimes_A A/Ap = \begin{cases} A/Ap, & p|u, \\ 0, & p \nmid u. \end{cases}$$

Доказательство. $p|u \implies A/Au \otimes_A A/Ap = A/Au \otimes_{A/Au} A/Ap = A/Ap$;

$p \nmid u \implies u+Ap \neq 0$ в $A/Ap \implies (a+Au)\otimes(b+Ap) = (au + Au) \otimes (u + Ap)^{-1}(b + Ap) = 0$, $\forall a, b \in A \implies A/Au \otimes_A A/Ap = 0$. □

Из лемм вытекает, что размерность векторного пространства $M \otimes_A A/Ap$ над полем A/Ap не превосходит m и равна m в том и только в том случае, когда $p|u_1$. Поэтому m однозначно определяется как $\max_p \dim_{A/Ap} M \otimes_A A/Ap$ (максимум по всем простым элементам p кольца A) и не зависит от разложения.

Возьмём один из таких простых элементов p, на которых достигается максимум, и рассмотрим подмодуль $pM \subseteq M$. Имеем $pM \simeq Ap/Au_1 \oplus \cdots \oplus Ap/Au_m \simeq A/Au'_1 \oplus \cdots \oplus A/Au'_m$, где $u'_i = u_i/p$. Те слагаемые, у которых u'_i обратимы, равны 0, и их можно отбросить, а остальные u'_i являются инвариантными множителями для pM и определены однозначно с точностью до умножения на обратимые элементы по предположению индукции. Отсюда следует, что набор тех u_i, которые не ассоциированы с p, определён однозначно, а поскольку общее количество инвариантных множителей не зависит от разложения (как мы уже выяснили), то и весь набор $(u_1, \ldots, u_m)$ определён однозначно с точностью до обратимых множителей.