$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[rr, "\varphi_{uni}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & U(\mathfrak{g}) \arrow[dl, dashed, "\exists!\,\psi"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

<u>Вопрос</u>: Будет ли φ_{uni} вложением?

Обозначим $\varphi_{uni}(x) =: \overline{x}$, $\forall x \in \mathfrak{g}$

Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис $\mathfrak{g}$

$\Longrightarrow$ $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}$ порождают $U(\mathfrak{g})$ как асс. алгебру с единицей

$\Longrightarrow$ $\overline{e_{i_1}} \cdot \ldots \cdot \overline{e_{i_m}}$ порождают $U(\mathfrak{g})$ как вект. пр-во
$(m \geq 0)$

<u>Теорема Пуанкаре – Биркгофа – Витта</u> Произведения $\overline{e_{i_1}} \cdot \ldots \cdot \overline{e_{i_m}}$, где $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_m \leq n$, $m \geq 0$
(<u>упорядоченные одночлены</u>)

образуют базис в $U(\mathfrak{g})$.

В частности, $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}$ линейно независимы $\Longrightarrow$ $\varphi_{uni} : \mathfrak{g} \hookrightarrow U(\mathfrak{g})$

Д-во 1) **Порождаемость**: $\forall$ одночлен $\overline{e}_{j_1} \cdot \ldots \cdot \overline{e}_{j_m}$ линейно выражается через упоряд. одночлены

Двойная индукция по m и числу инверсий в $(j_1, \ldots, j_m)$

База $m = 0, 1$ очевидна.

Шаг: Пусть $j_k > j_{k+1}$ для нек. k

$$\Rightarrow \overline{e}_{j_1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\overline{e}_{j_k} \cdot \overline{e}_{j_{k+1}}}_{\overline{e}_{j_{k+1}} \cdot \overline{e}_{j_k} + \overline{[e_{j_k}, e_{j_{k+1}}]}} \cdot \ldots \cdot \overline{e}_{j_m} = \underbrace{\overline{e}_{j_1} \cdots \overline{e}_{j_{k+1}} \cdot \overline{e}_{j_k} \cdots \overline{e}_{j_m}}_{\text{число инверсий на 1 меньше}} + \underbrace{\overline{e}_{j_1} \cdots \overline{[e_{j_k}, e_{j_{k+1}}]} \cdots \overline{e}_{j_m}}_{\text{степень } m-1}$$

выражаются через упоряд. одночлены по предп. индукции

2) **Линейная независимость**

Анализ ситуации: пусть утв. доказано. Рассм. $U(\mathfrak{g})$ как левый регул. $U(\mathfrak{g})$-модуль

Действие $\mathfrak{g}$ на $U(\mathfrak{g})$ умножением слева в базисах:

$$\bar e_{i_1}\cdot\ldots\cdot\bar e_{i_m} =: e_{i_1\ldots i_m}, \quad 1\le i_1\le\ldots\le i_m\le n$$

$$e_i\cdot e_{i_1\ldots i_m} = \bar e_i\cdot e_{i_1\ldots i_m} = \begin{cases} e_{i i_1\ldots i_m} & \text{при } i\le i_1 \\ e_i\cdot(e_{i_1}\cdot e_{i_2\ldots i_m}) = e_{i_1}\cdot(e_i\cdot e_{i_2\ldots i_m}) + [e_i,e_{i_1}]\cdot e_{i_2\ldots i_m} & \text{при } i>i_1 \end{cases}$$

$$= \ldots = e_{\underset{\le}{i_1}\ldots\underset{\le}{}\underset{\le}{i}\ldots\underset{\le}{i_m}} + \text{члены меньших степеней}$$

<u>Конструкция</u>: V — вект. пр-во с базисом $v_{i_1\ldots i_m}$, $1\le i_1\le\ldots\le i_m\le n$, $m\ge 0$ ← <u>степень</u> баз. в-ра

(например, $V = S(\mathfrak{g})$ — симм. алгебра)

Определим на V структуру $\mathfrak{g}$-модуля так, чтобы

$$e_i\cdot v_{i_1\ldots i_m} = v_{i_1\ldots i\ldots i_m} + \text{члены меньших степеней}$$

<u>Индукция по m</u>: $e_i\cdot v_\varnothing = v_i$

уже опр.

$$e_i\cdot v_{i_1\ldots i_m} = \begin{cases} v_{i i_1\ldots i_m} & \text{при } i\le i_1 \\ e_{i_1}\cdot(\underbrace{e_i\cdot v_{i_2\ldots i_m}}) + [e_i,e_{i_1}]\cdot v_{i_2\ldots i_m} & \text{при } i>i_1 \end{cases}$$

уже опр. → уже опр. $= v_{i_2\ldots i\ldots i_m}$ + члены меньших степеней

Надо д-ть, что V — $\mathfrak{g}$-модуль

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} \rho : \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(V) \\ \big\downarrow \text{\scriptsize Униі} & & \| \\ P : U(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & L(V) \end{array}$$

$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ — лин. предст. алгебры Ли

$P : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow L(V)$ — лин. предст. асс. алгебры

$v_{i_1 \ldots i_m} = e_{i_1} \cdot (e_{i_2} \cdot \ldots \cdot (e_{i_m} \cdot v_\varnothing) \ldots) = \rho(e_{i_1}) \cdots \rho(e_{i_m}) v_\varnothing = P(e_{i_1 \ldots i_m}) v_\varnothing$

линейно независимы $\Longrightarrow$ $P(e_{i_1 \ldots i_m})$ лин. независимы $\Longrightarrow$ $e_{i_1 \ldots i_m}$ лин. независимы

Проверка соотношений для $\mathfrak{g}$-модуля:

$$e_i \cdot (e_j \cdot v_{k_1 \ldots k_m}) - e_j \cdot (e_i \cdot v_{k_1 \ldots k_m}) = [e_i, e_j] \cdot v_{k_1 \ldots k_m}$$

Индукция по m. Б.о.о. $i > j$

$m = 0$: $e_i \cdot (e_j \cdot v_\varnothing) - e_j \cdot (e_i \cdot v_\varnothing) = e_i \cdot v_j - e_j \cdot v_i = [e_i, e_j] \cdot v_\varnothing$ по опр. действия $\mathfrak{g}$ на V

$\underline{m>0}$ Обозначим $k_1 =: k$, $(k_2,\dots,k_m) =: \pi$

Хотим д-ть: $e_i\cdot(e_j\cdot v_{k,\pi}) - e_j\cdot(e_i\cdot v_{k,\pi}) = [e_i,e_j]\cdot v_{k,\pi}$

$$e_i\cdot(\underline{e_j\cdot v_{k,\pi}}) - e_j\cdot(\underline{e_i\cdot v_{k,\pi}}) \underset{j\le k}{=\!=} e_i\cdot v_{j,k,\pi} - e_j\cdot(e_i\cdot v_{k,\pi}) = [e_i,e_j]\cdot v_{k,\pi}$$

по опр. действия $\mathfrak{g}$ на V

$$\Big\| \; j>k$$

$$e_i\cdot\big(e_k\cdot\underbrace{(e_j\cdot v_\pi)} + [e_j,e_k]\cdot v_\pi\big) - e_j\cdot\big(e_k\cdot(e_i\cdot v_\pi) + [e_i,e_k]\cdot v_\pi\big) =$$

все индексы $\ge k$
или степени $< m$

$$= e_k\cdot(e_i\cdot(e_j\cdot v_\pi)) + [e_i,e_k]\cdot(e_j\cdot v_\pi) + e_i\cdot([e_j,e_k]\cdot v_\pi)$$
$$- e_k\cdot(e_j\cdot(e_i\cdot v_\pi)) - [e_j,e_k]\cdot(e_i\cdot v_\pi) - e_j\cdot([e_i,e_k]\cdot v_\pi)$$
$$= e_k\cdot\big(\underbrace{e_i\cdot(e_j\cdot v_\pi) - e_j\cdot(e_i\cdot v_\pi)}_{[e_i,e_j]\cdot v_\pi}\big) + [[e_i,e_k],e_j]\cdot v_\pi + [e_i,[e_j,e_k]]\cdot v_\pi$$

$$= [e_i,e_j]\cdot(\underbrace{e_k\cdot v_\pi}_{v_{k,\pi}}) + \overbrace{[e_k,[e_i,e_j]]\cdot v_\pi + [e_j,[e_k,e_i]]\cdot v_\pi + [e_i,[e_j,e_k]]\cdot v_\pi}^{0 \text{ по т-ду Якоби}}$$

Пусть V — вект. пр-во над полем K, $\operatorname{char} K \neq 2$,

$\beta : V \times V \longrightarrow K$ — симм. билин. форма

$q : V \longrightarrow K$ — соотв. квадр. форма

Можно ли вложить в асс. алгебру с единицей: $V \hookrightarrow A$

так, чтобы $v \cdot v = q(v)$ в A, $\forall v \in V$?

Опр. <u>Алгебра Клиффорда</u> пр-ва V с симм. билин. формой β
или с квадр. формой q

— это асс. алгебра с единицей $Cl(V) = Cl(V, \beta) = Cl(V, q)$,

удовл. универс. св-ву:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\varphi_{uni}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Cl(V) \arrow[dl, dashed, "\exists!\,\psi"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

$\exists$ лин. отобр. $\varphi_{uni} : V \longrightarrow Cl(V)$, для которого:

$\varphi_{uni}(v) \cdot \varphi_{uni}(v) = q(v)$, $\forall v \in V$,

и $\forall$ лин. отобр. $\varphi : V \longrightarrow A$ (асс. алг. с 1) со св-вом $\varphi(v) \cdot \varphi(v) = q(v)$, $\forall v \in V$

$\exists!$ гомоморфизм алгебр с единицей $\psi : Cl(V) \longrightarrow A$ т.ч. $\varphi = \psi \circ \varphi_{uni}$

Предл. Алгебра Клиффорда вект. пр-ва с симм. билинейной / квадр. формой существует и единственна с точн. до изоморфизма.

Д-во Единственность $\Leftarrow$ универс. св-во

Конструкция: $Cl(V) = T(V)/I$, где $I \triangleleft T(V)$ — двустор. идеал, порожденный эл-тами $v\otimes v - q(v)$ $(v \in V$

Универс. св-во:

$$\begin{tikzcd}
 & T(V)/I \arrow[dd, dashed, "\exists!\psi"] & \\
V \arrow[ur, "\varphi_{uni}"] \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & & T(V) \arrow[ul, "\pi"'] \arrow[dl, dashed, "\exists!\tau"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

$$\varphi_{uni} = \pi|_V$$

$$\tau(v_1 \otimes \dots \otimes v_m) := \varphi(v_1)\cdot \ldots \cdot \varphi(v_m)$$

$$\tau(v\otimes v - q(v)) = \varphi(v)\cdot\varphi(v) - q(v) = 0$$

$$\Longrightarrow I \subseteq \operatorname{Ker}\tau$$

$$\tau = \psi\circ\pi \Longrightarrow \varphi = \tau|_V = \psi\circ\pi|_V = \psi\circ\varphi_{uni}$$

Соотношения в алгебре Клиффорда

Обозначим $\varphi_{uni}(v) =: \overline{v}$, $\forall v \in V$

$$\overline{v}^2 = q(v)$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\overline{v+w}^{\,2} & = (\overline{v}+\overline{w})^2 = & \overline{v}^2 & + & \overline{w}^2 & + & \overline{v}\cdot\overline{w} + \overline{w}\cdot\overline{v} \\
\| & & \| & & \| & & \| \\
q(v+w) & = \beta(v+w, v+w) = & q(v) & + & q(w) & + & \underbrace{\beta(v,w) + \beta(w,v)}_{= 2\cdot\beta(v,w)}
\end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{v}\cdot\overline{w} + \overline{w}\cdot\overline{v} = 2\cdot\beta(v,w), \qquad \forall v, w \in V$$

$$\overline{v}\cdot\overline{w} = -\overline{w}\cdot\overline{v} + 2\cdot\beta(v,w)$$