

Вопрос: Будет ли Φ_{uni} вложением?

Обозначим $\Phi_{uni}(x) =: \bar{x}$, $\forall x \in g$

Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис g

$\Rightarrow \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ порождают $U(g)$ как асс. систему с единицей

$\Rightarrow \bar{e}_{i_1} \dots \bar{e}_{i_m}$ порождают $U(g)$ как вект. пр-во
($m \geq 0$)

Теорема Пуанкаре — Биркгофа — Витта

Произведения $\bar{e}_{i_1} \dots \bar{e}_{i_m}$, где $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq n$,
(упорядоченные одночлены) $m \geq 0$

образуют базис в $U(g)$.

В частности, $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ линейно независимы

$\Rightarrow \Phi_{uni} : g \hookrightarrow U(g)$

D-6 1) Порядность: \forall одночлен $\bar{e}_{j_1} \dots \bar{e}_{j_m}$ линейно выражается через упоряд. одночлены

Двойная индукция по m и числу инверсий в (j_1, \dots, j_m)

База $m = 0, 1$ очевидна.

Шаг: Пусть $j_k > j_{k+1}$ для нек. k

$$\Rightarrow \bar{e}_{j_1} \dots \bar{e}_{j_k} \cdot \bar{e}_{j_{k+1}} \dots \bar{e}_{j_m} = \underbrace{\bar{e}_{j_1} \dots \bar{e}_{j_{k+1}} \bar{e}_{j_k} \dots \bar{e}_{j_m}}_{\text{число инверсий на 1 меньше}} + \underbrace{\bar{e}_{j_1} \dots [\bar{e}_{j_k}, \bar{e}_{j_{k+1}}] \dots \bar{e}_{j_m}}_{\text{степень } m-1}$$

$$\quad \quad \quad \parallel$$

$$\quad \quad \quad \bar{e}_{j_{k+1}} \bar{e}_{j_k} + [\bar{e}_{j_k}, \bar{e}_{j_{k+1}}]$$

Выражается через упоряд. одночлены по индукции

2) Линейная независимость

Аналог ситуации: пусть утв. доказано. Рассм. $U(\sigma)$ как левый регул. $U(\sigma)$ -модуль

Действие σ на $V(\sigma)$ умножается слева в базисах:

$$\bar{e}_i \cdots \bar{e}_{i_m} =: e_{i_1 \dots i_m}, \quad 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq n$$

$$e_i \cdot e_{i_1 \dots i_m} = \bar{e}_i \cdot e_{i_1 \dots i_m} = \begin{cases} e_{i i_1 \dots i_m} & \text{при } i \leq i_1 \\ e_i \cdot (e_{i_1} \cdot e_{i_2 \dots i_m}) = e_{i_1} \cdot (e_i \cdot e_{i_2 \dots i_m}) + [e_i, e_{i_1}] \cdot e_{i_2 \dots i_m} & \text{при } i > i_1 \\ \dots = e_{i_1 \dots i \dots i_m} + \text{члены меньших степеней} \end{cases}$$

Конструкция: V — вект. пр-во с базисом $v_{i_1 \dots i_m}$, $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq n$, $m \geq 0$
↑ степень
баз. в-ра

(например, $V = S(\sigma)$ — симм. алгебра)

Определим на V структуру σ -модуля так, чтобы

$$e_i \cdot v_{i_1 \dots i_m} = v_{i i_1 \dots i_m} + \text{члены меньших степеней}$$

Индукция по m : $e_i \cdot v_\emptyset = v_i$

$$e_i \cdot v_{i_1 \dots i_m} = \begin{cases} v_{i i_1 \dots i_m} & \text{при } i \leq i_1 \\ e_{i_1} \cdot (e_i \cdot v_{i_2 \dots i_m}) + [e_i, e_{i_1}] \cdot v_{i_2 \dots i_m} & \text{при } i > i_1 \end{cases}$$

уже опр. → *уже опр.* = $v_{i_2 \dots i \dots i_m} + \text{члены меньших степеней}$

Нужно показать, что V — \mathfrak{g} -модуль

$$\Rightarrow \rho: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V) \text{ — лин. предст. алгебры } \mathfrak{L}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \varphi_{\text{uni}} & \parallel & \\ \Gamma: U(\mathfrak{g}) \longrightarrow & L(V) & \text{ — лин. предст. асс. алгебры} \end{array}$$

$$v_{i_1 \dots i_m} = e_{i_1} \cdot (e_{i_2} \cdot \dots \cdot (e_{i_m} \cdot v_\emptyset) \dots) = \rho(e_{i_1}) \dots \rho(e_{i_m}) v_\emptyset = \Gamma(e_{i_1 \dots i_m}) v_\emptyset$$

линейно независимы $\Rightarrow \Gamma(e_{i_1 \dots i_m})$ лин. независимы $\Rightarrow e_{i_1 \dots i_m}$ лин. независимы

Проверим соотношения для \mathfrak{g} -модуля:

$$e_i \cdot (e_j \cdot v_{k_1 \dots k_m}) - e_j \cdot (e_i \cdot v_{k_1 \dots k_m}) = [e_i, e_j] \cdot v_{k_1 \dots k_m}$$

Индукция по m . Б.о.о. $i > j$

$$\underline{m=0}: e_i \cdot (e_j \cdot v_\emptyset) - e_j \cdot (e_i \cdot v_\emptyset) = e_i \cdot v_j - e_j \cdot v_i = [e_i, e_j] \cdot v_\emptyset \quad \text{по стр. действию } \mathfrak{g} \text{ на } V$$

$m > 0$ Обозначим $k_1 =: k, (k_2, \dots, k_m) =: \pi$

Хотим доказать: $e_i \cdot (e_j \cdot v_{k, \pi}) - e_j \cdot (e_i \cdot v_{k, \pi}) = [e_i, e_j] \cdot v_{k, \pi}$

$$e_i \cdot \underbrace{(e_j \cdot v_{k, \pi})}_{j \leq k} - e_j \cdot \underbrace{(e_i \cdot v_{k, \pi})}_{j > k} = e_i \cdot v_{j, k, \pi} - e_j \cdot (e_i \cdot v_{k, \pi}) = [e_i, e_j] \cdot v_{k, \pi} \quad \text{по опр. действия в } V$$

$$e_i \cdot \left(e_k \cdot (e_j \cdot v_{\pi}) + [e_j, e_k] \cdot v_{\pi} \right) - e_j \cdot \left(e_k \cdot (e_i \cdot v_{\pi}) + [e_i, e_k] \cdot v_{\pi} \right) =$$

все индексы $\geq k$
или степени $< m$

$$= e_k \cdot (e_i \cdot (e_j \cdot v_{\pi})) + [e_i, e_k] \cdot (e_j \cdot v_{\pi}) + e_i \cdot ([e_j, e_k] \cdot v_{\pi})$$

$$- e_k \cdot (e_j \cdot (e_i \cdot v_{\pi})) - [e_j, e_k] \cdot (e_i \cdot v_{\pi}) - e_j \cdot ([e_i, e_k] \cdot v_{\pi})$$

$$= e_k \cdot \underbrace{(e_i \cdot (e_j \cdot v_{\pi}) - e_j \cdot (e_i \cdot v_{\pi}))}_{[e_i, e_j] \cdot v_{\pi}} + \underbrace{[[e_i, e_k], e_j] \cdot v_{\pi} + [e_i, [e_j, e_k]] \cdot v_{\pi}}_{0 \text{ по } \tau\text{-ley Аксиомы}}$$

$$= [e_i, e_j] \cdot \underbrace{(e_k \cdot v_{\pi})}_{v_{k, \pi}} + [e_k, [e_i, e_j]] \cdot v_{\pi} + [e_j, [e_k, e_i]] \cdot v_{\pi} + [e_i, [e_j, e_k]] \cdot v_{\pi}$$

Пусть V — вект. пр-во над полем K , char $K \neq 2$

$\beta: V \times V \rightarrow K$ — симм. билин. форма

$q: V \rightarrow K$ — соотв. квадрат. форма

Можно ли вложить в асс. алгебру с единицей: $V \hookrightarrow A$

так, чтобы $v \cdot v = q(v)$ в A , $\forall v \in V$?

Опр. Алгебра Клиффорда пр-ва V с симм. билин. формой β
или с квадрат. формой q

— это асс. алгебра с единицей $Cl(V) = Cl(V, \beta) = Cl(V, q)$,

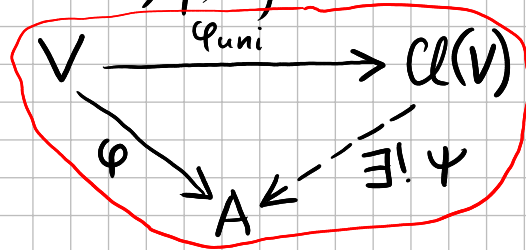
удовл. универс. св-ву:

\exists лин. отображ. $\varphi_{uni}: V \rightarrow Cl(V)$, для которого:

$$\varphi_{uni}(v) \cdot \varphi_{uni}(v) = q(v), \quad \forall v \in V$$

и \forall лин. отображ. $\varphi: V \rightarrow A$ со св-вом $\varphi(v) \cdot \varphi(v) = q(v)$, $\forall v \in V$
асс. алг. с 1

$\exists!$ гомоморфизм алгебр $\psi: Cl(V) \rightarrow A$ т.ч. $\varphi = \psi \cdot \varphi_{uni}$
с единицей

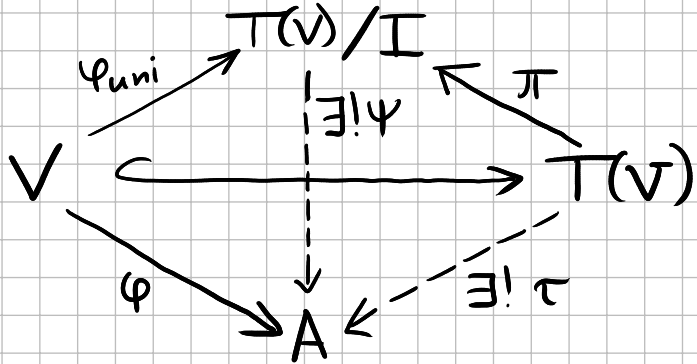


Предл. Алгебра Кэли-Гейсера вект. пр-ва с сумм. линейной / квадрат. формой существует и единственна с точн. до изоморфизма.

Д-во Единственность \Leftarrow универс. св-во

Конструкция: $\mathcal{C}(V) = T(V) / I$, где $I \triangleleft T(V)$ — двустер. идеал, порожденный элементами $v \otimes v - q(v)$ ($v \in V$)

Универс. св-во:



$$\varphi_{uni} = \pi|_V$$

$$\tau(v_1 \otimes \dots \otimes v_m) := \varphi(v_1) \cdot \dots \cdot \varphi(v_m)$$

$$\tau(v \otimes v - q(v)) = \varphi(v) \cdot \varphi(v) - q(v) = 0$$

$$\Rightarrow I \subseteq \text{Ker } \tau$$

$$\tau = \psi \circ \pi \Rightarrow \varphi = \tau|_V = \psi \circ \pi|_V = \psi \circ \varphi_{uni}$$

Свойства в алгебре Клиффорда

Обозначим $\varphi_{uni}(v) =: \bar{v}$, $\forall v \in V$

$$\bar{v}^2 = q(v)$$

$$\overline{v+w}^2 = (\bar{v} + \bar{w})^2 = \bar{v}^2 + \bar{w}^2 + \underbrace{\bar{v} \cdot \bar{w} + \bar{w} \cdot \bar{v}}$$

\parallel

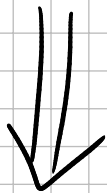
\parallel

\parallel

\parallel

$$q(v+w) = \beta(v+w, v+w) = q(v) + q(w) + \underbrace{\beta(v, w) + \beta(w, v)}$$

\parallel
 $2 \cdot \beta(v, w)$



$$\bar{v} \cdot \bar{w} + \bar{w} \cdot \bar{v} = 2 \cdot \beta(v, w), \quad \forall v, w \in V$$

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = -\bar{w} \cdot \bar{v} + 2 \cdot \beta(v, w)$$