Пусть $\rho : SO_3(\mathbb{C}) \to GL(V)$ — комплексное лин. представление

$$\begin{tikzcd} SO_3(\mathbb{C}) \arrow[r, "\rho"] & GL(V) \\ SL_2(\mathbb{C}) \arrow[u, "R_2"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$R = \rho \circ R_2$, $\operatorname{Ker} R \ni -E$

Обратно : R — лин. предст. $SL_2(\mathbb{C})$, $\operatorname{Ker} R \ni -E$

$\Rightarrow$ $\exists!$ лин. предст. $\overline{R}$ группы $SO_3(\mathbb{C})$ т.ч. $R = \overline{R} \circ R_2$

<u>Случай неприв. предст.</u> : $\operatorname{Ker} R_n \ni -E \iff R_n(-E) f(x,y) = f(-x,-y) = (-1)^n f(x,y)$

$= f(x,y)$, $\forall f \in V(n)$

$\iff n \vdots 2$

<u>Сл-е</u> Неприв. комплексные лин. представления групп Ли $SO_3(\mathbb{C})$ и $SO_3(\mathbb{R})$ реализуются в пр-вах $V(2m) = \mathbb{C}[x,y]_{2m}$ размерностей $2m+1$ $(m \geq 0)$ и имеют вид $\overline{R_{2m}}$ т.ч. $\overline{R_{2m}} \circ R_2 = R_{2m}$

Гармонический анализ на 2-мерной сфере

$$SO_3(\mathbb{R}) \circlearrowright \mathbb{R}^3 \supset S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

$$\Downarrow$$

Лин. предст. R группы $SO_3(\mathbb{R})$ в пр-ве $A = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3] = \mathbb{C}[\underset{x_1 + i\cdot x_2}{\overset{\|}{z}}, \bar{z}, x_3]$

и в пр-ве $A|_{S^2} = \mathbb{C}[S^2]$

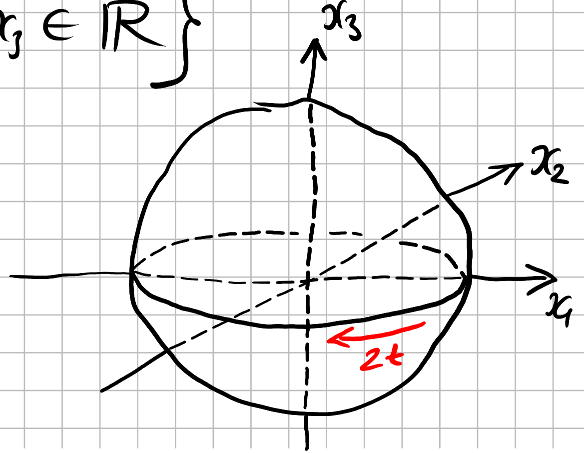
<u>Задача</u> Разложить представление группы $SO_3(\mathbb{R})$ в $\mathbb{C}[S^2]$ в пр. сумму неприв. предст.

$$\circlearrowright \mathbb{R}^3 \simeq \circlearrowright V(2)_{\mathbb{R}} = \left\{ F = \begin{pmatrix} \underbrace{x_1 + i x_2}_{z} & i x_3 \\ i x_3 & \underbrace{x_1 - i x_2}_{\bar{z}} \end{pmatrix},\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$SO_3(\mathbb{R}) \xleftarrow[R_2]{} SU_2(\mathbb{C}) \ni g : F \longmapsto (g^{-1})^T \cdot F \cdot g^{-1}$$

В частности, $R_2(\underbrace{\exp itZ}_{\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}}) =: g(t) : (z, x_3) \longmapsto (e^{-2it} z, x_3)$

поворот вокруг оси x_3 против ч.с. на угол $2t$



$$A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$$

A_n — пр-во однор. многочл. степени n — инв. конечномер. подпр-во

$$\dim A_n = C_{n+2}^2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Базис: $z^k \bar{z}^l x_3^m$, $k+l+m=n$

Соб. знач. $R(g(t))$: $e^{i(2k-2l)t}$,

Соб. знач. $dR(Z)$: $2k-2l$

(<u>веса</u>)

Старший из весов: $2n$

Соотв. старший вектор: z^n $\Longrightarrow$ $A_n \supset H_n \simeq V(2n)$

H_n — мин. инв. подпр-во

Др. инв. подпр-во: $q \cdot A_{n-2}$, $q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$q \cdot A_{n-2}$ — нет веса $2n$

$\Longrightarrow$ $H_n \cap q\cdot A_{n-2} = \{0\}$

$\dim = 2n+1$, $\frac{n(n-1)}{2}$ $\Longrightarrow$ в сумме $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$

$\Longrightarrow$ $A_n = H_n \oplus q \cdot A_{n-2} =$

$$= H_n \oplus q\cdot H_{n-2} \oplus q^2\cdot H_{n-4} \oplus \dots$$

Ограничим на S^2:

$$f(\lambda\cdot x) = \lambda^n\cdot f(x)$$

$$\begin{array}{ccc}
A_n & \xrightarrow{\ \sim\ } & A_n\big|_{S^2} = U_n \oplus A_{n-2}\big|_{S^2} = U_n \oplus U_{n-2} \oplus U_{n-4} \oplus \dots \\
\cup & & \cup \\
H_n & \xrightarrow{\ \sim\ } & U_n \simeq V(2n)
\end{array}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{C}[S^2] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} U_n \simeq \bigoplus_{n=0}^{\infty} V(2n)$$

Весовой базис в U_n: $\underbrace{f_{n,0},\ f_{n,1},\ \dots,\ f_{n,2n}}$ Сферические ф-ции Лапласа

Соб. знач. $\rho_{2n}(Z)$: $2n,\ 2n-2,\ \dots,\ -2n$

для $R(g(t))$: $e^{2nit},\ e^{(2n-2)it},\ \dots,\ e^{-2nit}$

Инвариантное эрмитово скал. умножение на $\mathbb{C}[S^2]$: $(f_1|f_2) := \int_{S^2} f_1(x)\overline{f_2(x)}\,dx$

$$A_{\le n} = \bigoplus_{m=0}^{n} A_m \Longrightarrow \mathbb{C}[S^2]_{\le n} = \underbrace{V_0 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_{n-1}}_{\mathbb{C}[S^2]_{<n}} \oplus \underbrace{V_n}_{\text{единств. инв. доп. подпр-во}}$$

$$\Longrightarrow V_n = \mathbb{C}[S^2]_{<n}^{\perp} \cap \mathbb{C}[S^2]_{\le n}$$

$\Longrightarrow$ $V_n \perp V_m$ при $m < n$

$R(g(t))$ — унит. опер. на каждом V_n $\Longrightarrow$ $f_{n,k}$ ортогональны др. др. при разных k,n

$G \subset GL(V)$ — группа Ли $\Longrightarrow$ её касат. алгебра Ли $\mathfrak{g} \subset L(V)$

ассоц. алгебра лин. операторов на V

<u>Вопрос</u>: Всякую ли алгебру Ли $\mathfrak{g}$ можно вложить в ассоц. алгебру A так, что $\mathfrak{g}$ — подалгебра Ли в $A^{(-)}$, т.е.

$$\forall x, y \in \mathfrak{g}: \quad \underbrace{[x, y]}_{\text{коммутатор в } \mathfrak{g}} = x \cdot y - y \cdot x \quad ?$$

умножение в A

$\exists$? "универсальное" вложение

<u>Опр.</u> <u>Универсальная обёртывающая алгебра</u> алгебры Ли $\mathfrak{g}$ — это ассоциативная алгебра с единицей U, для кот. выполнено

<u>универсальное св-во</u>: $\exists$ гомоморфизм алгебр Ли $\varphi_{uni}: \mathfrak{g} \longrightarrow U^{(-)}$ т.ч. $\forall$ асс. алг. с ед. A и $\forall$ гомоморф. алгебр Ли $\varphi: \mathfrak{g} \longrightarrow A^{(-)}$ $\exists!$ гомоморфизм асс. алгебр с единицей $\psi: U \longrightarrow A$, для кот. $\varphi = \psi \circ \varphi_{uni}$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "\varphi_{uni}"] \arrow[d, "\varphi"'] & U \arrow[dl, dashed, "\exists!\,\psi"] \\
A &
\end{tikzcd}$$

Предл. Универс. обёрт. алгебра существует и единственна с точн. до изоморфизма

Д-во: **Единственность** Пусть U, U' — две универс. обёрт. алгебры для $\mathfrak{g}$

$\varphi_{uni}, \varphi'_{uni}$ — соотв. универс. отобр.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "\varphi_{uni}"] \arrow[d, "\varphi'_{uni}"'] & U \arrow[dl, dashed, bend left=10, "\exists!\,\psi"'] \arrow[loop right, dashed, "\psi'\circ\psi = id"] \\
U' \arrow[ur, dashed, bend right=10, "\exists!\,\psi'"'] \arrow[loop below, dashed, "\psi\circ\psi' = id"] &
\end{tikzcd}$$

$\exists!\ \psi, \psi' :\quad \varphi'_{uni} = \psi\circ\varphi_{uni},\quad \varphi_{uni} = \psi'\circ\varphi'_{uni}$

$\Longrightarrow\ \varphi_{uni} = \underbrace{\psi'\circ\psi}\circ\varphi_{uni}$

$\Longrightarrow\ \psi'\circ\psi = id_U$

Аналогично, $\psi\circ\psi' = id_{U'}$ $\Longrightarrow$ $U \xrightarrow{\sim} U'$

Построение

Тензорная алгебра $T(\mathfrak{g}) = \underset{\text{осн. поле}}{K} \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^{\otimes 2} \oplus \mathfrak{g}^{\otimes 2} \oplus \dots$ — асс. алгебра с 1 относительно $\otimes$

$\mathfrak{g} \to T(\mathfrak{g})$ — <u>не</u> гомоморфизм алгебр Ли

$$[x,y] \neq x\otimes y - y\otimes x \quad (x,y\in\mathfrak{g})$$

$$x\otimes y - y\otimes x - [x,y] \neq 0$$

Рассм. $I \triangleleft T(\mathfrak{g})$ — идеал, порождённый всеми $x\otimes y - y\otimes x - [x,y]$ $(x,y\in\mathfrak{g})$

Положим $U = T(\mathfrak{g})/I$

Универс. св-во :

$$\begin{tikzcd}
 & U = T(\mathfrak{g})/I \arrow[dd, dashed, "\exists!\psi"] & \\
\mathfrak{g} \arrow[ur, "\varphi_{uni}"] \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & & T(\mathfrak{g}) \arrow[ul, "\pi"'] \arrow[dl, dashed] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

$$\varphi_{uni} = \pi|_{\mathfrak{g}}$$

$\exists!\tau$: $\tau(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) := \underbrace{\varphi(v_1) \cdot \ldots \cdot \varphi(v_n)}_{\text{полилин. по } v_1, \dots, v_n}$

корр. опр. по универс. св-ву тенз. произведений

$\forall x, y \in \mathfrak{g}$

$$\tau(x \otimes y - y \otimes x - [x,y]) = \tau(x \otimes y) - \tau(y \otimes x) - \tau([x,y]) = \varphi(x)\cdot\varphi(y) - \varphi(y)\cdot\varphi(x) - \varphi([x,y]) = 0$$

$\Longrightarrow$ $\operatorname{Ker}\tau \supseteq I$

$\Longrightarrow$ $\exists!\,\psi$: $\tau = \pi \circ \psi$ $\Longrightarrow$ $\varphi = \tau|_{\mathfrak{g}} = \psi \circ \pi|_{\mathfrak{g}} = \psi \circ \varphi_{uni}$

Обозначение : $U = U(\mathfrak{g})$

Замечание $\forall$ лин. предст. алгебры Ли

$$\begin{tikzcd} \rho : \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{uni}"] & \mathfrak{gl}(V) \arrow[d, equal] \\ \widetilde{\rho} : U(\mathfrak{g}) \arrow[r] & L(V) \end{tikzcd}$$

однозначно продолжается до лин. предст. ассоц. алгебры

$\mathfrak{g}$- модули $=$ $U(\mathfrak{g})$-модули