Домашнее задание №1

1. Доказать, что группа $SL_n(\mathbb{K})$ матриц с определителем 1 является подгруппой Ли в $GL_n(\mathbb{K})$, и найти её размерность.

2. Доказать, что группа $O_{p,q}(\mathbb{R})$ псевдоортогональных матриц является подгруппой Ли в $GL_n(\mathbb{R})$ $(n = p+q)$, и найти её размерность.

3. Доказать, что следующие группы являются *вещественными* подгруппами Ли в $GL_n(\mathbb{C})$ (рассматриваемой, как вещественная группа Ли), и найти их размерности:

   (a) группа $U_{p,q}(\mathbb{C})$ *псевдоунитарных матриц*, которые соответствуют линейным операторам в пространстве $\mathbb{C}^n$ $(n = p+q)$, сохраняющим эрмитову полуторалинейную форму γ сигнатуры (p,q) в канонической записи $\gamma(x,y) = \overline{x}_1 y_1 + \cdots + \overline{x}_p y_p - \overline{x}_{p+1} y_{p+1} - \cdots - \overline{x}_n y_n$;

   (b) группа $SU_n(\mathbb{C})$ унитарных матриц с определителем 1.

4. Доказать, что группа $GL_n(\mathbb{H})$ невырожденных кватернионных матриц является вещественной группой Ли, и найти её размерность.

5. Пусть на пространстве $\mathbb{C}^n$ задано стандартное эрмитово скалярное умножение. Доказать, что $U_n(\mathbb{C})$ есть пересечение любых двух из трёх подгрупп $GL_n(\mathbb{C})$, $O_{2n}(\mathbb{R})$, $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ в $GL_{2n}(\mathbb{R})$, где ортогональная и симплектическая группы рассматриваются по отношению к вещественной и мнимой части эрмитова скалярного умножения на $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$.

6. Пусть на (правом) кватернионном векторном пространстве $\mathbb{H}^n$ задана стандартная положительно определённая эрмитова полуторалинейная форма $\gamma(x,y) = \overline{x}_1 y_1 + \cdots + \overline{x}_n y_n$. Доказать:

   (a) $\mathbb{H}$-линейные операторы, сохраняющие γ, задаются *унитарными кватернионными матрицами*, т.е. такими $g \in GL_n(\mathbb{H})$, что $g^* \cdot g = e$ (здесь $*$ обозначает эрмитово сопряжение кватернионных матриц);

   (b) группа унитарных кватернионных матриц $U_n(\mathbb{H}) \subset GL_n(\mathbb{H})$ является подгруппой Ли. Какова её размерность?

   (c) Разложим $\gamma(x,y) = \alpha(x,y) + k \cdot \omega(x,y)$ в соответствии с разложением $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus k \cdot \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^2$ (здесь k — одна из кватернионных единиц). Тогда α и ω — эрмитово скалярное умножение и симплектическая форма на комплексном векторном пространстве $\mathbb{H}^n \simeq \mathbb{C}^{2n}$, соответственно, причём $\omega(x,y) = \alpha(x \cdot k, y)$.

   (d) Доказать, что $U_n(\mathbb{H})$ есть пересечение любых двух из трёх подгрупп $GL_n(\mathbb{H})$, $U_{2n}(\mathbb{C})$, $Sp_{2n}(\mathbb{C})$ в $GL_{2n}(\mathbb{C})$, где унитарная и симплектическая группы рассматриваются по отношению к формам α и ω, соответственно.

7. Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра с единицей над $\mathbb{K}$.

   (a) Доказать, что группа её обратимых элементов $A^\times$ является группой Ли.

   (b) Что это за группа Ли, если $A = \mathbb{K}[x]/(x^2)$?