Домашнее задание №11

1. Вычислить фундаментальную группу у следующих групп Ли:
   (a) $O_n(\mathbb{C})$;
   (b) $O_{p,q}(\mathbb{R})$.

2. Доказать, что $\mathrm{Spin}_6(\mathbb{R}) \simeq SU_4(\mathbb{C})$ (*указание*: рассмотреть естественное действие $SU_4(\mathbb{C})$ на пространстве $\bigwedge^2 \mathbb{C}^4$ и найти в нём 6-мерное инвариантное вещественное подпространство).

3. Пусть G — односвязная группа Ли. Доказать, что её кратные коммутанты $G^{(k)}$ являются односвязными подгруппами Ли.

4. Введём на односвязной накрывающей группе Ли $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})} \approx \mathbb{R}^3$ координаты t, a, b ($0 < a < +\infty$, $-\infty < t, b < +\infty$) так, что универсальное накрытие $\pi : \widetilde{SL_2(\mathbb{R})} \to SL_2(\mathbb{R})$ имеет вид
$$\pi(t, a, b) = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix},$$
где $c = \cos t$, $s = \sin t$, $ad - b^2 = 1$. Найти формулы для операций умножения и инверсии на $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ в этих координатах.

5. Доказать, что односвязная накрывающая группа Ли $\widetilde{Sp_{2n}(\mathbb{R})}$ не является линейной группой Ли.

6. Рассмотрим группу $N_3(\mathbb{R})$ верхних унитреугольных вещественных матриц размера 3×3. Доказать:
   (a) $[N_3(\mathbb{R}), N_3(\mathbb{R})]$ — подгруппа Ли, состоящая из матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (b) $Z = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, k \in \mathbb{Z} \right\}$ — дискретная центральная подгруппа в $N_3(\mathbb{R})$.
   (c) В любом линейном представлении группы Ли $N_3(\mathbb{R})$ элементы подгруппы $[N_3(\mathbb{R}), N_3(\mathbb{R})]$ записываются в подходящем базисе верхними унитреугольными матрицами.
   (d) $G = N_3(\mathbb{R})/Z$ не является линейной группой Ли.