Домашнее задание №12

1. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли с базисом $\{e_1, \ldots, e_5\}$ и ненулевыми коммутационнными соотношениями (с точностью до перестановки аргументов):

$$[e_1, e_5] = 2e_1, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_5] = e_2 + e_3, \quad [e_3, e_5] = e_3 + e_4, \quad [e_4, e_5] = e_4.$$

   (a) Доказать, что $\mathfrak{g}$ разрешима.

   (b) Найти матрицу формы Киллинга в базисе $\{e_1, \ldots, e_5\}$. Каково ядро формы Киллинга?

2. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, и $\mathfrak{h} \triangleleft \mathfrak{g}$ — идеал. Доказать, что ограничение на $\mathfrak{h}$ формы Киллинга для $\mathfrak{g}$ есть форма Киллинга для $\mathfrak{h}$.

3. Пусть на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ задано невырожденное скалярное умножение. Доказать: $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})^{\perp} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

4. Будут ли простыми (и при каких n) алгебры Ли

   (a) $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{K})$,

   (b) $\mathfrak{so}_n(\mathbb{K})$?

5. (a) Доказать, что форма Киллинга на $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ имеет вид: $(\xi \mid \eta)_{\mathrm{ad}} = 2n \operatorname{tr}(\xi \cdot \eta) - 2 \operatorname{tr}(\xi) \cdot \operatorname{tr}(\eta)$.

   (b) Проверить, что форма Киллинга на $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ невырождена.

6. Вычислить форму Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{so}_n(\mathbb{K})$. Будет ли эта алгебра Ли полупростой?

7. Может ли форма Киллинга на вещественной алгебре Ли быть положительно определена?