

Домашнее задание №13

1. Пусть ω_k — k -й фундаментальный вес алгебры Ли \mathfrak{sl}_n .

(a) Вычислить $\omega_k(x)$, где $x = \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix}$ — элемент подалгебры Ли диагональных матриц $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{sl}_n$.

(b) Доказать, что естественное представление группы SL_n в пространстве $\bigwedge^k(\mathbb{C}^n)$ неприводимо, со старшим весом ω_k .

2. Доказать, что естественное представление группы SL_n в пространстве $S^k(\mathbb{C}^n)$ неприводимо, со старшим весом $k\omega_1$.

3. Пусть λ — вес алгебры Ли \mathfrak{sl}_n с числовыми отметками $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Указать в пространстве

$$\underbrace{\mathbb{C}^n \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^n}_{\lambda_1} \otimes \underbrace{\bigwedge^2(\mathbb{C}^n) \otimes \dots \otimes \bigwedge^2(\mathbb{C}^n)}_{\lambda_2} \otimes \dots \otimes \underbrace{\bigwedge^{n-1}(\mathbb{C}^n) \otimes \dots \otimes \bigwedge^{n-1}(\mathbb{C}^n)}_{\lambda_{n-1}}$$

инвариантное подпространство с неприводимым представлением группы SL_n старшего веса λ .