

Программа спецкурса
«Группы Ли»
2019/2020 уч. год
Лектор Д. А. Тимашёв

Осенний семестр: «Общая теория групп Ли»

- 1) Понятие группы Ли. Примеры групп Ли. Подгруппы Ли, их замкнутость.
- 2) Действия групп Ли на многообразиях, примеры. Свойства орбит и стабилизаторов.
- 3) Транзитивные действия групп Ли и однородные пространства. Структура однородного пространства на множестве левых смежных классов по подгруппе Ли.
- 4) Гомоморфизмы групп Ли, их свойства. Ядро и образ гомоморфизма. Факторгруппы Ли. Пробразы и пересечения подгрупп Ли.
- 5) Связные компоненты групп Ли, группа компонент. Связная группа Ли порождается любой окрестностью единицы.
- 6) Точная гомотопическая последовательность расслоения группы Ли над однородным пространством.
- 7) Вычисление группы компонент и фундаментальной группы для классических групп Ли. Двухлистные накрытия $SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow SO_3(\mathbb{C})$, $SU_2 \rightarrow SO_3(\mathbb{R})$.
- 8) Односвязная накрывающая группы Ли. Коммутативность фундаментальной группы. Получение произвольных связных групп Ли из односвязных.
- 9) Понятие алгебры Ли, примеры. Правоинвариантные векторные поля на группе Ли. Касательная алгебра Ли, примеры.
- 10) Дифференцирование действий групп Ли, поля скоростей. Касательное пространство к орбите и алгебра Ли стабилизатора.
- 11) Дифференциал гомоморфизма групп Ли, его ядро и образ.
- 12) Вычисление касательных алгебр классических групп Ли.
- 13) Линейные представления групп и алгебр Ли, операции над ними.
- 14) Представление изотропии. Присоединённое представление.
- 15) Касательные алгебры прообразов и пересечений подгрупп Ли.
- 16) Касательные алгебры стабилизаторов векторов и нормализаторов подпространств в линейных представлениях, централизаторов элементов группы и алгебры Ли.
- 17) Группа Ли автоморфизмов конечномерной алгебры и её касательная алгебра Ли.
- 18) Правоинвариантные дифференциальные уравнения на группе Ли, неограниченная продолжаемость их решений.
- 19) Гомоморфизм связной группы Ли однозначно определяется своим дифференциалом. Связная подгруппа Ли однозначно определяется своей касательной подалгеброй Ли.
- 20) Центр группы Ли, его касательная алгебра. Коммутативность группы Ли и её касательной алгебры.
- 21) Нормализатор подгруппы Ли, его касательная алгебра. Нормальные подгруппы Ли и идеалы в касательной алгебре.
- 22) Деформация кривой на группе Ли, дифференциальное уравнение деформации.
- 23) Интегрирование гомоморфизмов касательных алгебр Ли. Односвязная группа Ли однозначно определяется своей алгеброй Ли.
- 24) Экспоненциальное отображение, его свойства, дифференциал.
- 25) Взаимодействие \exp с гомоморфизмами групп Ли. Экспоненциальное отображение для коммутативной группы Ли.

Весенний семестр: «Структура групп и алгебр Ли»

- 26) Классификация связных коммутативных вещественных групп Ли.
- 27) Коммутант группы и алгебры Ли, разрешимость групп и алгебр Ли.
- 28) Замыкание Мальцева, его свойства. Радикал групп и алгебр Ли.
- 29) Полупростые группы и алгебры Ли. Комплекси́фикация и вещественные формы алгебр Ли и групп Ли.
- 30) Теоремы Ли и Энгеля, их следствия.
- 31) Инвариантные скалярные умножения на алгебрах Ли. Форма Киллинга.
- 32) Критерии разрешимости и полупростоты линейных алгебр Ли в терминах инвариантных скалярных умножений. Критерий Картана.
- 33) Разложение полупростой алгебры Ли в прямую сумму простых идеалов.
- 34) Элемент и оператор Казимира. Теорема Вейля о полной приводимости представлений полупростой алгебры Ли.
- 35) Автоморфизмы и дифференцирования полупростых алгебр Ли. Разложение Жордана в полупростой комплексной алгебре Ли.
- 36) Теория представлений алгебры Ли \mathfrak{sl}_2 и группы Ли SL_2 .
- 37) Подалгебры Картана и корневое разложение полупростой комплексной алгебры Ли. Свойства системы корней.
- 38) Абстрактные системы корней и их простейшие свойства. Группа Вейля.
- 39) Положительные, отрицательные и простые корни. Восстановление системы корней по простым корням.
- 40) Эквивалентность систем корней. Разложение системы корней на компоненты. Матрицы Картана и диаграммы Дынкина.
- 41) Регулярные элементы в полупростой алгебре Ли. Сопряжённость картановских подалгебр.
- 42) Свободные алгебры Ли. Задание алгебр Ли образующими и соотношениями. Образующие Шевалле полупростой алгебры Ли.
- 43) Теорема единственности для комплексных полупростых алгебр Ли.
- 44) Система весов линейного представления полупростой алгебры Ли. Подалгебры Бореля. Старшие векторы и старшие веса. Доминантные и фундаментальные веса.
- 45) Свойства модуля, порождённого старшим вектором.
- 46) Теорема единственности для неприводимых линейных представлений полупростых алгебр Ли. Построение неприводимого представления с заданным старшим весом.
- 47) Максимальные торы в полупростых комплексных группах Ли.
- 48) Подгруппы Бореля, треугольное разложение в полупростой группе Ли.
- 49) Теоремы о нормализаторе и централизаторе.
- 50) Структура и классификация полупростых комплексных групп Ли.

В каждом билете по программе годового спецкурса будут два теоретических вопроса из программы и одна задача. В каждом билете по программе полугодового спецкурса (осенний или весенний семестр) будет один теоретический вопрос из программы и одна задача.