Домашнее задание №2

1. Пусть γ — эрмитова или косоэрмитова полуторалинейная форма на (правом) кватернионном векторном пространстве $\mathbb{H}^n$. Доказать:

   (a) Если $\gamma(x,x)$=0, $\forall x \in \mathbb{H}^n$, то $\gamma = 0$.

   (b) В эрмитовом случае путем замены базиса форму γ можно привести к однозначно определённому стандартному виду $\gamma(x,y) = \overline{x}_1 y_1 + \dots + \overline{x}_p y_p - \overline{x}_{p+1} y_{p+1} - \dots - \overline{x}_{p+q} y_{p+q}$.

   (c) В косоэрмитовом случае путем замены базиса форму γ можно привести к однозначно определённому стандартному виду $\gamma(x,y) = \overline{x}_1 \cdot k \cdot y_1 + \dots + \overline{x}_r \cdot k \cdot y_r$.

2. Пусть на $\mathbb{H}^n$ задана стандартная невырожденная косоэрмитова полуторалинейная форма $\gamma(x,y) = \overline{x}_1 \cdot k \cdot y_1 + \dots + \overline{x}_n \cdot k \cdot y_n$.

   (a) Доказать, что группа *косоунитарных кватернионных матриц* $U_n^*(\mathbb{H}) \subset GL_n(\mathbb{H})$, соответствующих $\mathbb{H}$-линейным операторам, сохраняющим γ, является подгруппой Ли, и найти её размерность?

   (b) Разложим $\gamma(x,y) = \alpha(x,y) + k \cdot \omega(x,y)$ в соответствии с разложением $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus k \cdot \mathbb{C}$. Тогда α и ω — косоэрмитова полуторалинейная форма сигнатуры (n,n) и симметрическая билинейная форма ранга $2n$ на комплексном векторном пространстве $\mathbb{H}^n \simeq \mathbb{C}^{2n}$, соответственно, причём $\omega(x,y) = \alpha(x \cdot k, y)$.

   (c) Доказать, что $U_n^*(\mathbb{H})$ есть пересечение любых двух из трёх подгрупп $GL_n(\mathbb{H})$, $U_{n,n}(\mathbb{C})$, $O_{2n}(\mathbb{C})$ в $GL_{2n}(\mathbb{C})$, где псевдоунитарная и ортогональная группы рассматриваются по отношению к формам α и ω, соответственно.

3. Доказать связность следующих групп Ли:

   (a) $SL_n(\mathbb{K})$;

   (b) $Sp_{2n}(\mathbb{K})$;

   (c) $U_n(\mathbb{C})$;

   (d) $GL_n(\mathbb{H})$.

4. Найти компоненты связности группы Ли $O_n(\mathbb{C})$.

5. (a) Из каких матриц состоит группа Ли $O_{1,1}(\mathbb{R})$ и как устроены её компоненты связности?

   (b) Доказать, что группа Ли $O_{p,q}(\mathbb{R})^\circ$ состоит из псевдоортогональных матриц, у которых определитель и верхний левый угловой минор порядка p положительны.

   (c) Вычислить группу компонент связности $O_{p,q}(\mathbb{R})/O_{p,q}(\mathbb{R})^\circ$.

6. Доказать, что $Sp_{2n}(\mathbb{K}) \subset SL_{2n}(\mathbb{K})$.

7. Описать все собственные подгруппы Ли

   (a) в аддитивной группе K;

   (b) в мультипликативной группе $K^\times$.