

**Программа экзамена по курсу «Основы теории Ли»,
3 курс, поток ФММФ, 341 группа, весна 2025 г.
Лектор Д. А. Тимашёв**

1. Понятие группы Ли. Примеры групп Ли. Подгруппы Ли, их замкнутость.
2. Связная группа Ли порождается любой окрестностью единицы. Связные компоненты групп Ли, группа компонент.
3. Дифференцирование умножения и инверсии на группе Ли. Дифференцируемые отображения постоянного ранга.
4. Фазовый поток векторного поля на многообразии. Производная Ли, коммутатор векторных полей.
5. Правоинвариантные векторные поля на группе Ли. Однопараметрические подгруппы и экспоненциальное отображение, его свойства.
6. Присоединённое представление группы Ли. Касательная алгебра Ли.
7. Гомоморфизмы групп Ли и их дифференциалы, связь с exp. Экспонента суммы коммутирующих элементов алгебры Ли.
8. Касательная алгебра Ли подгруппы Ли. Связная подгруппа Ли однозначно определяется своей касательной алгеброй Ли. Пересечение подгрупп Ли.
9. Ядра, образы, прообразы групп Ли при гомоморфизмах.
10. Линейные представления групп Ли и алгебр Ли, связь между ними: инвариантные подпространства, полная приводимость, теоретико-представленческие конструкции (сопряжённое представление, прямая сумма, тензорное произведение).
11. Действия групп Ли на многообразиях, поля скоростей, их фазовые потоки. Алгебра Ли правоинвариантных векторных полей на группе Ли.
12. Свойства орбит и стабилизаторов для действий и линейных представлений групп Ли.
13. Автоморфизмы и дифференцирования конечномерной алгебры. Внутренние автоморфизмы и дифференцирования алгебры Ли.
14. Транзитивные действия групп Ли и однородные многообразия. Представление изотропии. Структура однородного многообразия на множестве левых смежных классов по подгруппе Ли.
15. Факторгруппы Ли, их касательные алгебры Ли. Основная теорема о гомоморфизмах групп Ли.
16. Односвязная накрывающая группы Ли. Коммутативность фундаментальной группы.
17. Классификация связных коммутативных групп Ли.
18. Годограф скорости кривой на группе Ли. Существование кривой с заданным годографом скорости и начальным условием. Деформация кривой на группе Ли, дифференциальное уравнение годографа деформации.
19. Интегрирование гомоморфизмов алгебр Ли. Односвязная группа Ли однозначно определяется своей алгеброй Ли.
20. Центр и коммутант группы Ли и алгебры Ли.
21. Разрешимость групп Ли и алгебр Ли.
22. Теорема Ли и её следствия.
23. Теорема Энгеля и её следствия.
24. Инвариантные скалярные умножения на алгебрах Ли. Форма Киллинга.
25. Критерий разрешимости линейной алгебры Ли в терминах стандартного скалярного умножения.
26. Полупростые алгебры Ли и группы Ли. Критерии Картана разрешимости и полупростоты алгебры Ли. Структура полупростой алгебры Ли.
27. Теорема Вейля о полной приводимости линейных представлений полупростой алгебры Ли.
28. Дифференцирования полупростых алгебр Ли. Существование группы Ли с заданной полупростой касательной алгеброй Ли.

Список литературы

- [1] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, М., Наука, 1988.
- [2] Ж.-П. Серр, *Алгебры Ли и группы Ли*, М., Мир, 1969.
- [3] Ф. Уорнер, *Основы теории гладких многообразий и групп Ли*, М., Бибфизмат, 1987.