

Программа спецкурса
«Группы Ли»
2023/2024 уч. год
Лектор Д. А. Тимашёв

Осенний семестр: «Общая теория групп Ли»

- 1) Понятие группы Ли. Примеры групп Ли. Подгруппы Ли, их замкнутость.
- 2) Связная группа Ли порождается любой окрестностью единицы. Связные компоненты групп Ли, группа компонент.
- 3) Фазовый поток векторного поля на многообразии. Производная Ли, коммутатор векторных полей.
- 4) Правоинвариантные векторные поля на группе Ли. Однопараметрические подгруппы и экспоненциальное отображение, его свойства.
- 5) Присоединённое представление группы Ли. Касательная алгебра Ли.
- 6) Гомоморфизмы групп Ли и их дифференциалы, связь с \exp . Экспонента суммы коммутирующих элементов алгебры Ли.
- 7) Касательная алгебра Ли подгруппы Ли. Связная подгруппа Ли однозначно определяется своей касательной алгеброй Ли. Пересечение подгрупп Ли.
- 8) Ядра, образы, прообразы групп Ли при гомоморфизмах.
- 9) Линейные представления групп Ли и алгебр Ли, связь между ними: инвариантные подпространства, полная приводимость, теоретико-представленческие конструкции (сопряжённое представление, прямая сумма, тензорное произведение).
- 10) Действия групп Ли на многообразиях, поля скоростей, их фазовые потоки. Алгебра Ли правоинвариантных векторных полей на группе Ли.
- 11) Свойства орбит и стабилизаторов для действий и линейных представлений групп Ли.
- 12) Автоморфизмы и дифференцирования конечномерной алгебры. Внутренние автоморфизмы и дифференцирования алгебры Ли.
- 13) Транзитивные действия групп Ли и однородные многообразия. Представление изотропии. Структура однородного многообразия на множестве левых смежных классов по подгруппе Ли.
- 14) Факторгруппы Ли, их касательные алгебры Ли. Основная теорема о гомоморфизмах групп Ли.
- 15) Односвязная накрывающая группы Ли. Коммутативность фундаментальной группы.
- 16) Классификация связных коммутативных групп Ли.
- 17) Годограф скорости кривой на группе Ли. Существование кривой с заданным годографом скорости и начальным условием. Деформация кривой на группе Ли, дифференциальное уравнение годографа деформации.
- 18) Интегрирование гомоморфизмов алгебр Ли. Односвязная группа Ли однозначно определяется своей алгеброй Ли.
- 19) Центр и коммутант группы Ли и алгебры Ли.
- 20) Разрешимость групп Ли и алгебр Ли.
- 21) Теорема Ли и её следствия.
- 22) Теорема Энгеля и её следствия.
- 23) Инвариантные скалярные умножения на алгебрах Ли. Форма Киллинга.

- 24) Критерий разрешимости линейной алгебры Ли в терминах стандартного скалярного умножения.
- 25) Полупростые алгебры Ли и группы Ли. Критерии Картана разрешимости и полупростоты алгебры Ли. Структура полупростой алгебры Ли.
- 26) Теорема Вейля о полной приводимости линейных представлений полупростой алгебры Ли.
- 27) Дифференцирование полупростых алгебр Ли. Существование группы Ли с заданной полупростой касательной алгеброй Ли.

Весенний семестр: «Структура групп и алгебр Ли»

- 28) Полупрямое произведение групп Ли и полупрямая сумма алгебр Ли.
- 29) Замыкание Мальцева, его свойства.
- 30) Радикал групп и алгебр Ли. Критерий полупростоты группы Ли.
- 31) Разложение Леви алгебры Ли.
- 32) Теорема Картана о существовании группы Ли с данной касательной алгеброй Ли.
- 33) Разложение Жордана в полупростой комплексной алгебре Ли.
- 34) Теория представлений алгебры Ли \mathfrak{sl}_2 и группы Ли SL_2 .
- 35) Подалгебры Картана и корневое разложение полупростой комплексной алгебры Ли.
- 36) Свойства системы корней полупростой алгебры Ли.
- 37) Абстрактные системы корней и их простейшие свойства. Положительные, отрицательные и простые корни.
- 38) Группа Вейля. Восстановление системы корней по простым корням.
- 39) Эквивалентность систем корней. Разложение системы корней на компоненты. Матрицы Картана и диаграммы Дынкина.
- 40) Классификация систем корней.
- 41) Регулярные элементы в полупростой алгебре Ли. Сопряжённость картановских подалгебр.
- 42) Описание простых идеалов полупростой алгебры Ли в терминах корней. Образующие Шевалле.
- 43) Теорема единственности для комплексных полупростых алгебр Ли.
- 44) Классические простые алгебры Ли.
- 45) Модели особых простых алгебр Ли в терминах градуировок. Пример: алгебра Ли типа G_2 .
- 46) Система весов линейного представления полупростой алгебры Ли. Подалгебры Бореля. Старшие векторы и старшие веса. Доминантные и фундаментальные веса.
- 47) Свойства модуля, порождённого старшим вектором.
- 48) Теорема единственности для неприводимых линейных представлений полупростых алгебр Ли. Построение неприводимого представления с заданным старшим весом.
- 49) Построение фундаментальных представлений алгебры Ли \mathfrak{sl}_n .
- 50) Построение фундаментальных представлений алгебры Ли типа G_2 .

В каждом билете по программе годового спецкурса будут два теоретических вопроса из программы и одна задача. В каждом билете по программе полугодового спецкурса (осенний или весенний семестр) будет один теоретический вопрос из программы и одна задача.