Домашнее задание №3

1. На $G = \mathbb{R}^2$ введена структура группы Ли с операцией умножения: $x \cdot y = (x_1 + e^{-x_2} y_1, x_2 + y_2)$. Описать правоинвариантные векторные поля на G и экспоненциальное отображение $\exp : \mathfrak{g} \to G$.

2. На $G = \mathbb{R}^3$ задана операция умножения:

$$x \cdot y = (x_1 + y_1 \cos x_3 - y_2 \sin x_3, x_2 + y_1 \sin x_3 + y_2 \cos x_3, x_3 + y_3).$$

   (a) Доказать, что эта операция превращает G в группу Ли.

   (b) Найти касательную алгебру Ли $\mathfrak{g}$.

   (c) Описать правоинвариантные векторные поля на G.

   (d) Вычислить экспоненциальное отображение $\exp : \mathfrak{g} \to G$.

3. Найти касательную алгебру Ли групп Ли:

   (a) $O_{p,q}(\mathbb{R})$;

   (b) $U_{p,q}(\mathbb{C})$;

   (c) $U_n(\mathbb{H})$.

4. Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра с единицей над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и $G = A^\times$ — группа Ли её обратимых элементов. Доказать, что $\mathfrak{g} = A^{(-)}$ — *присоединённая алгебра Ли* к ассоциативной алгебре A, т.е. векторное пространство A с новой операцией (вместо ассоциативного умножения): $[\xi, \eta] = \xi \cdot \eta - \eta \cdot \xi$.

5. На сферах каких размерностей из диапазона $\{1, 2, 3, 4\}$ можно ввести структуру группы Ли?

6. Определим на группе Ли G векторнозначную (со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$) дифференциальную 1-*форму Маурера–Картана*: $\theta(\xi) = \xi \cdot g^{-1} \in \mathfrak{g}$, $\forall g \in G,\ \xi \in T_g G$. Доказать, что форма Маурера–Картана удовлетворяет *структурному уравнению*:

$$d\theta = \frac{1}{2}\, \theta \wedge \theta$$

   (внешнее произведение двух дифференциальных 1-форм α, β со значениями в $\mathfrak{g}$ определяется обычной формулой, только умножение числовых значений заменяется на умножение в $\mathfrak{g}$: $(\alpha \wedge \beta)(\xi, \eta) = [\alpha(\xi), \beta(\eta)] - [\alpha(\eta), \beta(\xi)]$).

7. Доказать, что если диффеоморфизм группы Ли G сохраняет форму Маурера–Картана θ, то это диффеоморфизм правого сдвига.