Домашнее задание №4

1. Пусть $x(t) \in \mathbb{K}^n$ — вектор-функция вещественного параметра t, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $\dot{x}(t) = Ax(t) + y$, где $y \in \mathbb{K}^n$ и A — линейный оператор на $\mathbb{K}^n$, с начальным условием $x(0) = 0$. Доказать:
$$x(t) = \frac{\exp(tA) - E}{A}\,(y), \quad \text{где} \quad \frac{\exp(tA) - E}{A} = tE + \frac{t^2}{2!}A + \frac{t^3}{3!}A^2 + \cdots .$$

2. Вывести формулу для дифференциала экспоненциального отображения $\exp : \mathfrak{g} \to G$ в произвольной точке:
$$d_\xi \exp(\eta) = \frac{\exp \operatorname{ad}(\xi) - E}{\operatorname{ad}(\xi)}\,(\eta) \cdot \exp(\xi), \qquad \forall \xi, \eta \in \mathfrak{g}.$$

3. Доказать, что экспоненциальное отображение вырождено в точке $\xi \in \mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда оператор $\operatorname{ad}(\xi)$ имеет собственное значение вида $2\pi k\boldsymbol{i}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

4. Пусть $g(t)$ — гладкая кривая на группе Ли G с $g(0) = e$ и $\dot{g}(0) = \xi$. Доказать, что $\exp(\xi) = \lim\limits_{n\to\infty} g(\frac{1}{n})^n$.

5. Пусть $\mathbb{R} \ni t \mapsto g(t) \in G$ — непрерывная кривая на группе Ли, причём $g(t+s) = g(t) \cdot g(s)$. Доказать, что кривая $g(t)$ является гладкой.

6. Пусть касательная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G разложена в прямую сумму подпространств: $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{u}_s$. Доказать, что отображение $\mathfrak{g} \to G$, определяемое формулой $\xi \mapsto \exp(\xi_1) \cdots \exp(\xi_s)$, где ξ_i — проекция ξ на $\mathfrak{u}_i$, является диффеоморфизмом в окрестности нуля.

7. Пусть ξ, η — векторы в достаточно малой окрестности нуля касательной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Доказать, что $\exp(\xi) \cdot \exp(\eta) = \exp(\xi + \eta + \frac{1}{2}[\xi, \eta] + \cdots)$ (многоточие обозначает члены порядка малости ≥ 3 по ξ, η).