Домашнее задание №5

1. Для каких из нижеперечисленных групп Ли экспоненциальное отображение инъективно, сюръективно, является диффеоморфизмом (локально или в целом)?

   (a) $SL_n(\mathbb{C})$;

   (b) $GL_n(\mathbb{R})^{\circ}$;

   (c) $SU_n(\mathbb{C})$;

   (d) $SO_n(\mathbb{R})$;

   (e) группа $N_n(\mathbb{K})$ матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

2. Доказать, что экспоненциальное отображение диффеоморфно отображает

   (a) множество комплексных матриц размера $n \times n$ с собственными значениями в полосе $|\operatorname{Im}\lambda| < \pi$ на множество невырожденных комплексных матриц размера $n \times n$ без отрицательных собственных значений;

   (b) пространство $\mathfrak{p}_n$ вещественных симметрических матриц размера $n \times n$ на открытое подмножество положительно определённых матриц $P_n \subset \mathfrak{p}_n$.

3. Пусть G — группа Ли с касательной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Доказать: $\exp\bigl(\operatorname{Ad}(g)\xi\bigr) = g \cdot \exp(\xi) \cdot g^{-1}$, $\forall g \in G,\ \xi \in \mathfrak{g}$.

4. Пусть $\xi \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Доказать:

   (a) $\exp(\xi) = \cos\sqrt{\det\xi} \cdot e + \dfrac{\sin\sqrt{\det\xi}}{\sqrt{\det\xi}} \cdot \xi$ при $\det\xi > 0$;

   (b) $\exp(\xi) = e + \xi$ при $\det\xi = 0$;

   (c) $\exp(\xi) = \operatorname{ch}\sqrt{|\det\xi|} \cdot e + \dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{|\det\xi|}}{\sqrt{|\det\xi|}} \cdot \xi$ при $\det\xi < 0$

   (здесь e обозначает единичную матрицу размера 2×2).