Домашнее задание №6

1. (*К доказательству теоремы Картана*) Пусть H — замкнутая подгруппа вещественной группы Ли G, и $\mathfrak{h}$ — множество векторов $\xi \in \mathfrak{g}$, являющихся пределами последовательностей $c_n\xi_n$, где $c_n \in \mathbb{R}$, $\xi_n \in \mathfrak{g}$, $\xi_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\exp(\xi_n) = h_n \in H$.

   (a) Доказать, что $\mathfrak{h}$ замкнуто относительно сложения (и, тем самым, является подпространством в $\mathfrak{g}$).

   (b) Пусть $\mathfrak{s}$ — дополнительное к $\mathfrak{h}$ подпространство в $\mathfrak{g}$, и $\varphi : \mathfrak{g} \to G$ — отображение, определяемое формулой: $\varphi(\xi) = \exp(\xi')\cdot\exp(\xi'')$, где ξ' и ξ'' — проекции ξ на $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{s}$, соответственно. Доказать, что существуют окрестность нуля $U_0 \subset \mathfrak{g}$ и окрестность единицы $U \subset G$, для которых φ диффеоморфно отображает U_0 на U и $\varphi(\mathfrak{h} \cap U_0) = H \cap U$.

2. Пусть φ — автоморфизм группы Ли G. Доказать, что подгруппа неподвижных точек $G^\varphi = \{g \in G \mid \varphi(g) = g\}$ является подгруппой Ли, и найти её касательную алгебру Ли.

3. Доказать, что всякий непрерывный гомоморфизм групп Ли дифференцируем.

4. Пространство m-линейных форм на векторном пространстве V отождествляется с $(V^*)^{\otimes m}$, а пространство m-линейных отображений из V в V — с $V \otimes (V^*)^{\otimes m}$.

   (a) Доказать, что представление F группы Ли $GL(V)$ в пространстве m-линейных форм, определяемое естественным представлением $GL(V)$ в V, вычисляется по формуле

   $$(F(g)f)(v_1, \ldots, v_m) = f(g^{-1}v_1, \ldots, g^{-1}v_m),$$

   и вычислить его дифференциал.

   (b) Доказать, что представление T группы Ли $GL(V)$ в пространстве m-линейных отображений, определяемое естественным представлением $GL(V)$ в V, вычисляется по формуле

   $$(T(g)\varphi)(v_1, \ldots, v_m) = g \cdot \varphi(g^{-1}v_1, \ldots, g^{-1}v_m),$$

   и вычислить его дифференциал.