

## Домашнее задание №7

1. Разложить линейное представление группы Ли  $GL_n(\mathbb{K})$  в пространстве  $\mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}^n$  (тензорное произведение двух копий стандартного представления в пространстве  $\mathbb{K}^n$ ) на неприводимые слагаемые.
2. Пусть  $R : G \rightarrow GL(V)$  — линейное представление связной вещественной группы Ли  $G$  в евклидовом пространстве  $V$ , причём  $dR(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{so}(V)$ . Доказать, что представление  $R$  вполне приводимо.
3. Описать все одномерные комплексные линейные представления следующих вещественных и комплексных групп Ли:
  - (a)  $\mathbb{R}$ ;
  - (b)  $\mathbb{C}$ ;
  - (c)  $\mathbb{C}^\times$ ;
  - (d)  $\mathbb{T}$ .
4. Аддитивная группа Ли  $\mathbb{K}$  действует сама на себе сдвигами, и это действие индуцирует линейное представление группы  $\mathbb{K}$  в пространстве  $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$  многочленов степени  $\leq n$ .
  - (a) Доказать, что это представление является представлением группы Ли, и вычислить его дифференциал.
  - (b) Найти все инвариантные подпространства для этого представления.
  - (c) Будет ли это представление приводимым, неприводимым или вполне приводимым?