Домашнее задание №8

1. Рассмотрим линейное представление R группы Ли $U_1(\mathbb{H}) \times U_1(\mathbb{H})$ в пространстве $\mathbb{H}$ по формуле $R(g_1, g_2)\, q = g_1 \cdot q \cdot g_2^{-1}$. Доказать, что гомоморфизм R — двулистное накрытие группы Ли $SO(\mathbb{H}) \simeq SO_4(\mathbb{R})$, где структура евклидова пространства на $\mathbb{H}$ задаётся кватернионной нормой.

2. Группа Ли $U_2(\mathbb{H})$ действует заменами переменных в пространстве эрмитовых полуторалинейных форм на $\mathbb{H}^2$, которое можно отождествить с пространством эрмитовых кватернионных матриц $\mathrm{Herm}_2(\mathbb{H})$.

   (a) Разложить это линейное представление на неприводимые слагаемые.

   (b) Построить с его помощью двулистное накрытие $U_2(\mathbb{H}) \to SO_5(\mathbb{R})$.

3. Пусть G — группа Ли, и $g \in G$.

   (a) Доказать, что централизатор $Z_G(g) = \{h \in G \mid gh = hg\}$ — подгруппа Ли в G.

   (b) Доказать, что $\mathrm{Lie}\, Z_G(g) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(g) := \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{Ad}(g)\xi = \xi\}$.

4. Пусть G — группа Ли, и $\xi \in \mathfrak{g}$.

   (a) Доказать, что $Z_G(\xi) := \{g \in G \mid \mathrm{Ad}(g)\xi = \xi\}$ — подгруппа Ли в G.

   (b) Доказать, что $\mathrm{Lie}\, Z_G(\xi) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\xi) := \{\eta \in \mathfrak{g} \mid [\xi, \eta] = 0\}$.

5. Найти группу всех автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ и группу внутренних автоморфизмов $\mathrm{Inn}(\mathfrak{g})$, а также соответствующие алгебры Ли дифференцирований для следующих алгебр Ли:

   (a) $\mathfrak{g}$ состоит из всех матриц вида $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

   (b) $\mathfrak{g}$ состоит из всех матриц вида $\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.