Домашнее задание №9

1. Пусть $R : G \to GL(V)$ — линейное представление группы Ли, и $U \subset V$ — подпространство. Доказать, что его *централизатор*

$$Z_G(U) = \{g \in G \mid R(g)u = u,\ \forall u \in U\}$$

— подгруппа Ли в G, чья касательная алгебра Ли — *аннулятор* подпространства

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(U) = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid dR(\xi)u = 0,\ \forall u \in U\}.$$

2. Пусть $R : G \to GL(V)$ — линейное представление группы Ли, и $W \subset U \subset V$ — подпространства. Доказать, что подгруппа $G(U, W) \subset G$, состоящая из элементов $g \in G$, для которых оператор $R((g)$ сохраняет U и W и действует тождественно на U/W, является подгруппой Ли, и найти её касательную алгебру Ли.

3. Доказать, что нормализатор $N_G(H)$ произвольной (не обязательно связной) подгруппы Ли H в группе Ли G является подгруппой Ли, и найти её касательную алгебру Ли.

4. (a) Пусть $H \subset GL_n(\mathbb{K})$ — нормализатор подпространства $\langle e_1, \ldots, e_m\rangle \subset \mathbb{K}^n$, а $S \subset GL_n(\mathbb{K})$ — подмногообразие, состоящее из матриц вида

$$\left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline * & E \end{array}\right)$$

(верхний левый блок имеет размер $m \times m$). Доказать, что отображение умножения $S \times H \to GL_n(\mathbb{K})$ является диффеоморфизмом на окрестность единицы в $GL_n(\mathbb{K})$.

   (b) Доказать, что многообразие Грассмана $\mathrm{Gr}_m(\mathbb{K}^n)$ компактно.

5. (a) *Полным флагом* в пространстве $\mathbb{K}^n$ называется набор вложенных подпространств $U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_{n-1} \subset \mathbb{K}^n$ размерностей $\dim U_m = m$. Ввести на множестве полных флагов $\mathrm{Fl}(\mathbb{K}^n)$ структуру однородного многообразия относительно группы Ли $GL_n(\mathbb{K})$ и вычислить его размерность.

   (b) Доказать, что многообразие флагов $\mathrm{Fl}(\mathbb{K}^n)$ компактно.

6. (a) Доказать, что множество $\mathrm{LGr}(\mathbb{K}^{2n}) \subset \mathrm{Gr}_n(\mathbb{K}^{2n})$ лагранжевых подпространств в симплектическом векторном пространстве $\mathbb{K}^{2n}$ является подмногообразием, и вычислить его размерность.

   (b) Будет ли лагранжев грассманиан $\mathrm{LGr}(\mathbb{K}^{2n})$ компактным многообразием?

7. (a) Ввести на множестве m-мерных плоскостей в n-мерном аффинном пространстве над полем $\mathbb{K}$ структуру однородного многообразия и вычислить его размерность.

   (b) Будет ли это многообразие компактным?

8. Каким многообразиям диффеоморфны однородные многообразия

   (a) $U_n(\mathbb{C})/U_{n-1}(\mathbb{C})$;

   (b) $U_n(\mathbb{H})/U_{n-1}(\mathbb{H})$?