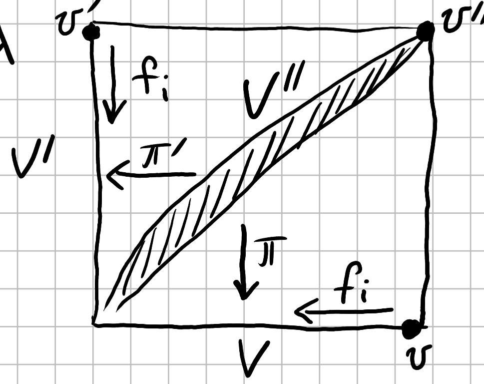
$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ — лин. представление п/п алгебры Ли над $\mathbb{C}$

<u>Сл-е</u> ρ неприв. $\Longrightarrow$ в V $\exists!$ ст. вектор, с точн. до проп.

<u>Теорема единственности</u> Неприв. представление ρ однозначно определяется своим старшим весом $\lambda \in P_+$, с точн. до изоморфизма

<u>Обозначение:</u> $\rho = \rho_\lambda$, $V = V(\lambda) \ni v_\lambda$ — старший в-р

$$\rho(\xi)\, v_\lambda = \begin{cases} \lambda(\xi)\cdot v_\lambda, & \forall \xi \in \mathfrak{h} \\ 0, & \forall \xi \in \mathfrak{n} \end{cases}$$



<u>Д-во:</u> Пусть V, V' — два неприв. $\mathfrak{g}$-модуля со ст. весом λ

$ \ni v, v'$ — ст. в-ры

Рассм. $V \oplus V' \ni v'' = (v, v')$ — тоже ст. в-р веса λ

$$\cup\!\!|$$

$$V'' = \langle v'', f_{i_1} \cdots f_{i_m} v'' \mid i_1, \ldots, i_m \rangle$$ — неприв. $\mathfrak{g}$-подмодуль

Проекции $\pi : V'' \longrightarrow V$, $\pi' : V'' \longrightarrow V'$, $\pi(v'') = v$, $\pi'(v'') = v'$

π, π' — ненул. гомоморфизмы неприв. $\mathfrak{g}$-модулей

$\Longrightarrow$ изоморфизмы по л. Шура

$$\Longrightarrow V \xrightarrow[\sim]{\pi' \circ \pi^{-1}} V'$$

<u>Теорема существования</u> $\forall \lambda \in P_+$ $\exists$ неприв. представление ρ_λ со ст. весом λ

Мн-во домин. весов $P_+ = \{ \lambda \in P \mid \lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \forall i = 1, \ldots, n = \dim \mathfrak{h} \}$

$$\lambda(h_i) = (\lambda | \alpha_i^\vee) = \frac{2(\lambda|\alpha_i)}{(\alpha_i|\alpha_i)} =: l_i$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda = l_1 \cdot \omega_1 + \ldots + l_n \cdot \omega_n$$

Достаточно построить ρ_λ с $\lambda = \omega_i$. В самом деле:

$$V(\omega_1)^{\otimes l_1} \otimes \cdots \otimes V(\omega_n)^{\otimes l_n} \ni v_{\omega_1}^{\otimes l_1} \otimes \cdots \otimes v_{\omega_n}^{\otimes l_n} = v_\lambda$$ — старший в-р веса λ

$$\Longrightarrow V(\lambda) = \langle v_\lambda, f_{i_1} \cdots f_{i_m} v_\lambda \mid i_1, \ldots, i_m \rangle$$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_s \implies \forall k \in \{1,\dots,n\} \quad \exists!\, i \in \{1,\dots,s\}$ т.ч.

пр. алгебры Ли

α_k — пр. корень для $\mathfrak{g}_i$

$h_k \in \mathfrak{g}_i$

$\implies V(\omega_k)$ — неприв. $\mathfrak{g}_i$-модуль, остальные $\mathfrak{g}_j$ действуют нулем

Достаточно построить $V(\omega_k)$ для каждой <u>простой</u> алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и даже просто $\mathfrak{g}$-модуль $V_k \ni v_k$ — ст. вр веса ω_k

$$\implies V(\omega_k) = \langle v_k,\ f_{i_1}\cdots f_{i_m} v_k \mid i_1,\dots,i_m \rangle$$

<u>Пример</u> $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, $\omega_k = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k$ $(k = 1,\dots,n-1)$, $\varepsilon_i \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix} = x_i$

$x_1 + \dots + x_n = 0$

Рассм. лин. предст. $\mathfrak{g}$ в $\Lambda^k \mathbb{C}^n \xleftarrow{\text{дифф-л}}$ лин. предст. $SL_n(\mathbb{C})$ и даже $GL_n(\mathbb{C})$

$\Lambda^k \mathbb{C}^n \supseteq \mathbb{C}\cdot e_1 \wedge \dots \wedge e_k$ инв. отн. $B_n = \left\{ \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}, \det \neq 0 \right\}$, поскольку $\langle e_1,\dots,e_k \rangle \subseteq \mathbb{C}^n$ инв.

$\Longrightarrow$ $e_1 \wedge \ldots \wedge e_k$ — ст. вектор

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{h} \quad \Longrightarrow \quad \xi \cdot (e_1 \wedge \ldots \wedge e_k) = \sum_{i=1}^{k} e_1 \wedge \ldots \wedge \underbrace{\xi \cdot e_i}_{= x_i \cdot e_i} \wedge \ldots \wedge e_k$$

$x_1 + \ldots + x_n = 0$

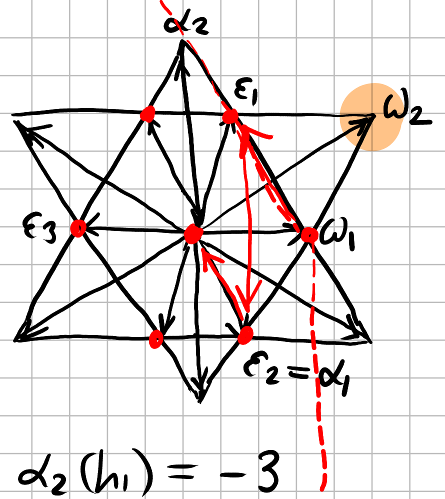
$$= \underbrace{(x_1 + \ldots + x_k)}_{\omega_k(\xi)} \cdot e_1 \wedge \ldots \wedge e_k$$

$\Longrightarrow$ вес $e_1 \wedge \ldots \wedge e_k$ равен ω_k

$$e_1 \wedge \ldots \wedge e_k \ \overset{\text{действие } SL_n(\mathbb{C})}{\rightsquigarrow} \ e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}, \quad \forall\, i_1 < \ldots < i_k$$

$$\Longrightarrow \quad V(\omega_k) = \Lambda^k \mathbb{C}^n$$

Пример: $\mathfrak{g}$ типа G_2, $\mathfrak{g} = \mathbb{C}^3 \oplus \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \oplus (\mathbb{C}^3)^*$



$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, корни: ε_i, $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, $-\varepsilon_i$

$(i = 1,2,3)$

пр. корни: $\alpha_1 = \varepsilon_2$, $\alpha_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$

$\overset{\alpha_1}{\circ} \Lleftarrow \overset{\alpha_2}{\circ}$

$\alpha_i(h_i) = 2$, $\alpha_1(h_2) = -1$, $\alpha_2(h_1) = -3$

$$\Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Фунд. веса: $\omega_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = -\varepsilon_3$, $\omega_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$

Лемма $\rho: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ — лин. предст. п/п алг. Ли над $\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ система весов Φ_ρ инв. отн. группы Вейля W

Д-во $\forall \alpha \in \Delta$: отражение $r_\alpha \in W$ имеет вид $r_\alpha = Ad(n_\alpha)\big|_{\mathfrak{t}}^{*}$, где

$n_\alpha = \varphi_\alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\rho = dR$

$\varphi_\alpha : SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow G$

$d\varphi_\alpha : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{s}_\alpha \subseteq \mathfrak{g}$

$$\mu \in \Phi_\rho \implies R(n_\alpha) \cdot V_\mu = V_{r_\alpha(\mu)} \implies r_\alpha(\mu) \in \Phi_\rho$$

Из леммы $\implies \Phi_{\rho_{\omega_1}} = \{ \pm \varepsilon_i, 0 \mid i = 1,2,3 \}$

$\dim V(\omega_1)_{\pm \varepsilon_i} = \dim V(\omega_1)_0 = 1 \implies \dim V(\omega_1) = 7$

Рассм. $V = \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^1 \oplus (\mathbb{C}^3)^*$. Введем на V структуру $\mathfrak{g}$-модуля

Действие $\mathfrak{sl}_3$: на $\mathbb{C}^3$ и $(\mathbb{C}^3)^* \longleftarrow$ естеств. действие SL_3

на $\mathbb{C}^1$ — тривиально

Действие $\mathbb{C}^3$: на $\mathbb{C}^3$: $x \cdot x' = a_{11}\, x \wedge x' \in \Lambda^2(\mathbb{C}^3) \simeq (\mathbb{C}^3)^*$

на $(\mathbb{C}^3)^*$: $x \cdot y = a_{1,-1} \langle x, y \rangle \in \mathbb{C}^1$

на $\mathbb{C}^1$: $x \cdot z = a_{1,0}\, z \cdot x \in \mathbb{C}^3$

Действие $(\mathbb{C}^3)^*$: на $\mathbb{C}^3$: $y \cdot x = a_{-1,1} \cdot \langle x, y \rangle \in \mathbb{C}^1$

на $(\mathbb{C}^3)^*$: $y \cdot y' = a_{-1,-1} \cdot y \wedge y' \in \Lambda^2(\mathbb{C}^3)^* \simeq \mathbb{C}^3$

на $\mathbb{C}^1$: $y \cdot z = a_{-1,0}\, z \cdot y \in (\mathbb{C}^3)^*$

<u>Упр.</u> Можно нормировать так, чтобы $a_{11} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $a_{-1,-1} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$a_{1,-1} = a_{-1,1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$a_{1,0} = a_{-1,0} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$V \ni e_3^*$ — ст. вектор веса $-\varepsilon_3 = \omega_1$

— порождает V как $\mathfrak{g}$-модуль $\Longrightarrow V = V(\omega_1)$

$\Lambda^2 V \ni e_1 \wedge e_3^*$ — ст. в-р веса ω_2

— порождает $V(\omega_2) \subset \Lambda^2 V$

На самом деле $V(\omega_2) = \mathfrak{g}$, $\rho_{\omega_2} = \mathrm{ad}$