Линейные представления полупр. алгебр Ли

$\mathfrak{g}$ — п/п компл. алгебра Ли

$\rho: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ — её комплексное линейное представление

Корневое разложение: $$\mathfrak{g} = \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ h_\alpha}}{\mathfrak{h}} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \underset{\substack{\| \\ \mathbb{C}\cdot e_\alpha}}{\mathfrak{g}^\alpha}$$

sl_2-тройки: $e_\alpha, e_{-\alpha}, h_\alpha \rightsquigarrow$ sl_2-подалгебра $s_\alpha = \langle e_\alpha, e_{-\alpha}, h_\alpha\rangle \simeq sl_2(\mathbb{C})$

$\rho(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{gl}(V)$ — диагонализ. подалг. Ли

$$\Downarrow$$

$$V = \bigoplus_\lambda V_\lambda, \text{ где } \underbrace{V_\lambda = \{v\in V \mid \forall \xi\in\mathfrak{h}: \rho(\xi)v = \lambda(\xi)\cdot v\}}_{\text{весовые подпр-ва}} \quad \lambda\in\mathfrak{h}^*$$

Система весов $\Phi_\rho = \Phi(V) = \{\lambda\in\mathfrak{h}^* \mid V_\lambda \neq \{0\}\}$

Лемма 1 $\forall \lambda \in \Phi_\rho\ \forall \alpha \in \Delta : \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$

$$\lambda(h_\alpha) = (\lambda | \alpha^\vee) = \frac{2(\lambda|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}$$

Д-во $\lambda(h_\alpha)$ — с.з. $\rho(h_\alpha)$ в лин. предст. $\rho|_{s_\alpha}$ $\Longrightarrow$ можно применить теорию предст. $\mathfrak{sl}_2$

$\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ — мн-во пр. корней

Опр. Решетка весов $P = \{\lambda \mid \lambda(h_i) \in \mathbb{Z},\ \forall i = 1, \dots, n\}$
$= (Q^\vee)^* \subset E \subset \mathfrak{t}^*$

$$\Phi_\rho \subset P \supseteq Q$$

подрешетка кон. индекса

Базис P образуют фундаментальные веса $\omega_1, \dots, \omega_n$: $\omega_i(h_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Пример $\quad \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}), \quad V = \mathbb{C}^n$

$$\mathfrak{h} = \left\{ \xi = \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix}, \ x_1 + \dots + x_n = 0 \right\}$$

$$\Phi(\mathbb{C}^n) = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}, \text{ где } \varepsilon_i(\xi) = x_i, \quad \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = 0$$

$$\Delta = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}, \quad \Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}, \quad \alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$$

$$h_i = \begin{array}{c c} & \begin{array}{c} i \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$P = \{ \lambda = l_1 \varepsilon_1 + \dots + l_n \cdot \varepsilon_n \mid l_1 \equiv \dots \equiv l_n \pmod{\mathbb{Z}} \}$$

опр. с точн. до свига на одно и то же число

$$\lambda(h_i) = l_i - l_{i+1}$$

$$= \mathbb{Z} \cdot \varepsilon_1 + \dots + \mathbb{Z} \cdot \varepsilon_n$$

Фунд. веса: $\omega_k = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k$

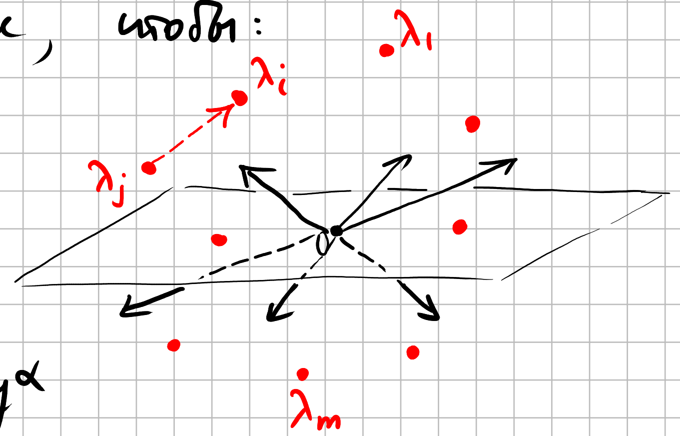
Лемма 2 $\forall \lambda \in \Phi_\rho \quad \forall \alpha \in \Delta : \quad \rho(e_\alpha) V_\lambda \subseteq V_{\lambda+\alpha}$

Д-во $\forall v \in V_\lambda, \ \xi \in \mathfrak{h} : \quad \rho(\xi)\rho(e_\alpha)v \Rightarrow \rho(e_\alpha)\underbrace{\rho(\xi)v}_{\lambda(\xi)\cdot v} + \rho(\underbrace{[\xi, e_\alpha]}_{\alpha(\xi)\cdot e_\alpha})v =$

$$= (\lambda(\xi) + \alpha(\xi)) \cdot \rho(e_\alpha)v \implies \rho(e_\alpha)v \in V_{\lambda+\alpha}$$

Можно пронумеровать $\Phi_\rho = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ так, чтобы:

$$\lambda_i = \lambda_j + \alpha, \quad \alpha \in \Delta^+ \implies i < j$$
$$\alpha \in \Delta^- \implies i > j$$



Треугольное разложение: $\mathfrak{g} = \underbrace{\underbrace{\bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha}_{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{h}}_{\mathfrak{b}} \oplus \underbrace{\bigoplus_{\alpha \in \Delta^-} \mathfrak{g}^\alpha}_{\mathfrak{n}^-}$

$\mathfrak{n}^\pm, \mathfrak{b}$ — подалгебры Ли

В базисе, согл. с разложением $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_m}$:

$$\rho(\mathfrak{t}) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \right\} =: \mathfrak{t}_N, \qquad \rho(\mathfrak{u}) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \right\} =: \mathfrak{u}_N$$

$N = \dim V$

$$\rho(\mathfrak{u}^-) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix} \right\} =: \mathfrak{u}_N^-$$

$$\rho(\mathfrak{b}) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \right\} =: \mathfrak{b}_N$$

<u>Сл-е 1</u> $\mathfrak{g} \overset{\rho}{\hookrightarrow} \mathfrak{gl}(V) \Rightarrow \mathfrak{t} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{t}_N$, $\mathfrak{u}^\pm = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}_N^\pm$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{b}_N$

<u>Сл-е 2</u> $\mathfrak{b}$ — максимальная разреш. подалг. Ли в $\mathfrak{g}$

подалгебра Бореля

<u>Д-во</u> <u>Максимальность</u>: $\mathfrak{b} \subset \underset{\text{разреш.}}{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{g} \Rightarrow \mathfrak{h} \supset \mathfrak{g}^{-\alpha}$ для нек. $\alpha \in \Delta^+ \Rightarrow \mathfrak{h} \supseteq \underset{\text{неразрешима}}{\mathfrak{s}_\alpha \simeq \mathfrak{sl}_2}$

Противоречие

Сл-е 3 $\exists\, v \in V$, $v \neq 0$ т.ч. прямая $\mathbb{C}\cdot v \subseteq V$ инв. отн. $\rho(\mathfrak{b})$

старший вектор

$$\forall \xi \in \mathfrak{t}: \quad \rho(\xi)\cdot v = \lambda(\xi)\cdot v, \quad \lambda \in \Phi_\rho$$
$$\forall \eta \in \mathfrak{u}: \quad \rho(\eta)\cdot v = 0$$

старший вес

Лемма 3 $\lambda \in \Phi_\rho$ — старший вес $\Longrightarrow$ $\forall \alpha \in \Delta^+: \ \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Д-во v — ст. вр для $\rho|_{S_\alpha}$, $\lambda(h_\alpha)$ — его ст. вес в смысле теории предст. $\mathfrak{sl}_2$

Сл-е λ — ст. вес $\Longrightarrow$ $\underbrace{\lambda = l_1\cdot\omega_1 + \ldots + l_n\cdot\omega_n, \quad l_i = \lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}_{\text{такие веса } \lambda \text{ наз. доминантными}}$

числ. отметки

Мн-во домин. весов: $\mathcal{P}_+ \subset \mathcal{P}$

Предл. Положим $v_{i_1 \dots i_k} = \rho(f_{i_1}) \cdots \rho(f_{i_k}) v$. Тогда:

1) Подпр-во $\tilde{V} = \langle \underset{\overset{\parallel}{v_\varnothing}}{v}, v_{i_1 \dots i_k} \mid 1 \le i_1, \dots, i_k \le n \rangle_{\mathbb{C}} \subset V$ инв. отн. ρ

2) $\rho|_{\tilde{V}}$ неприводимо

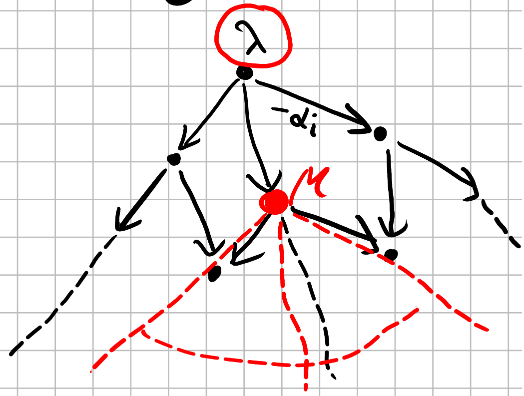
3) v — единств. ст. вр в $\tilde{V}$, с точн. до проп.

Д-во 1) a) $\rho(f_i) v_{i_1 \dots i_k} = v_{i i_1 \dots i_k}$

б) $\rho(h_i) v_{i_1 \dots i_k} = \sum_{\ell=1}^{k} \rho(f_{i_1}) \cdots \rho(\underbrace{[h_i f_{i_\ell}]}_{\overset{\parallel}{-a_{i_\ell, i} f_{i_\ell}}}) \cdots \rho(f_{i_k}) v + \rho(f_{i_1}) \cdots \rho(f_{i_k}) \underbrace{\rho(h_i) v}_{l_i \cdot v}$

$$= (l_i - a_{i_1,i} - \dots - a_{i_k,i}) \cdot v_{i_1 \dots i_k}$$

б) $$\rho(e_i)\, v_{i_1\dots i_k} = \sum_{l=1}^{k} \rho(f_{i_1})\cdots\rho(\underbrace{[e_i, f_{i_l}]}_{\begin{cases} h_i, & i=i_l \\ 0, & i\neq i_l\end{cases}})\cdots\rho(f_{i_k})v + \rho(f_{i_1})\cdots\rho(f_{i_k})\underbrace{\rho(e_i)v}_{=0} \in \tilde V$$



Следовательно, $\tilde V$ — инв. подпр-во.

$$\Phi(\tilde V) = \{\lambda, \lambda-\alpha_{i_1}-\dots-\alpha_{i_k} \mid v_{i_1\dots i_k}\neq 0\}$$

$\uparrow$ кратность 1

2) $\tilde V \supseteq V'$ — инв. подпр-во $\Longrightarrow$ $\tilde V = V' \oplus V''$ — инв. доп. подпр-во

$$\begin{matrix} \tilde V & = & V' & \oplus & V'' \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ v & = & v' & + & v'' \end{matrix}$$

v', v'' $\uparrow$ тоже имеет вес λ

$\Longrightarrow$ либо $v'=v$, $v''=0$ $\Longrightarrow$ $V'=\tilde V$

либо $v'=0$, $v''=v$ $\Longrightarrow$ $V''=\tilde V$, $V'=\{0\}$

3) Пусть $\tilde{v} \in \tilde{V}$ — др. ст. вр со ст. весом μ

либо $\mu = \lambda \Rightarrow \tilde{v} \sim v$

либо $\mu = \lambda - \alpha_{i_1} - \ldots - \alpha_{i_k}$

$$1), 2) \Rightarrow \tilde{V} = \langle \tilde{v}, \tilde{v}_{j_1 \ldots j_\ell} \mid j_1, \ldots, j_\ell \rangle$$

вес μ $\qquad$ $\mu - \alpha_{j_1} - \ldots - \alpha_{j_\ell}$

среди них нет веса λ

Противоречие