

**Программа экзамена по курсу “Линейная алгебра и геометрия”  
(вечернее отделение), 2020/2021 уч. год.  
Лектор Д. А. Тимашёв**

1. Векторные пространства: определение и примеры. Базис и размерность векторного пространства, координаты вектора в базисе, изоморфизм пространств одной размерности.
2. Матрица перехода от одного базиса к другому, её свойства. Преобразование координат вектора при замене базиса.
3. Подпространства в векторном пространстве, их суммы и пересечения. Размерность подпространства. Существование базиса, согласованного с одним и двумя подпространствами. Формула Грассмана для размерностей суммы и пересечения.
4. Линейно независимые подпространства. Прямая сумма подпространств.
5. Линейные функции. Сопряжённое пространство, его размерность, двойственный базис. Канонический изоморфизм между векторным пространством и его вторым сопряжённым.
6. Аннулятор подпространства, его свойства. Задание подпространства системой линейных уравнений.
7. Линейные отображения, их задание матрицами, операции над ними. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базисов.
8. Ядро и образ линейного отображения, их размерности, ранг линейного отображения. Критерии инъективности, сюръективности и биективности линейного отображения.
9. Линейные операторы, их матрицы. Алгебра линейных операторов на векторном пространстве. Определитель и след линейного оператора. Невырожденные операторы.
10. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения.
11. Характеристический многочлен. Алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения.
12. Линейная независимость собственных подпространств. Диагонализуемые линейные операторы, случай простого спектра.
13. Многочлены от линейных операторов. Теорема Гамильтона–Кэли.
14. Существование инвариантного подпространства размерности  $\leq 2$  для линейного оператора на вещественном векторном пространстве.
15. Корневые подпространства, их свойства. Разложение векторного пространства в прямую сумму корневых подпространств.
16. Циклические подпространства и жорданов базис для нильпотентного оператора.
17. Жорданова нормальная форма линейного оператора.
18. Билинейные функции и их матрицы. Преобразование матрицы билинейной функции при замене базиса. Ранг билинейной функции. Изоморфизм пространства со своим сопряжённым, задаваемый невырожденной билинейной функцией.
19. Симметрические и кососимметрические билинейные функции, их матрицы. Ортогональное дополнение к подпространству относительно симметрической или кососимметрической билинейной функции, его свойства.
20. Квадратичные функции, поляризация. Канонический вид симметрической билинейной и квадратичной функции.
21. Методы Лагранжа и Якоби приведения квадратичной функции к каноническому виду.

22. Нормальный вид симметрической билинейной и квадратичной функции в комплексном и вещественном векторном пространстве. Закон инерции.
23. Положительно определённые билинейные и квадратичные функции. Критерий Сильвестра.
24. Евклидовы векторные пространства: определение и примеры. Изоморфизм евклидовых пространств одной размерности.
25. Неравенство Коши–Буняковского. Длина и угол между векторами, их свойства.
26. Ортогональность векторов. Ортогональное дополнение к подпространству, его свойства. Ортогональная проекция. Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы.
27. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта.
28. Матрица и определитель Грама системы векторов евклидова пространства, их свойства.
29. Расстояние и угол между вектором и подпространством.
30. Объём параллелепипеда в евклидовом пространстве.
31. Соответствие между операторами и билинейными функциями в евклидовом пространстве. Сопряжённый оператор, его свойства.
32. Ортогональные операторы. Канонический вид матрицы ортогонального оператора.
33. Симметрические операторы. Канонический вид матрицы симметрического оператора. Приведение симметрической билинейной или квадратичной функции к главным осям.
34. Неотрицательные и положительно определённые симметрические операторы, извлечение из них корней.
35. Полярное разложение невырожденного линейного оператора в евклидовом пространстве.
36. Понятие тензора. Тензоры малых валентностей. Арифметические операции над тензорами, тензорное умножение.
37. Тензорный базис и размерность пространства тензоров типа  $(p, q)$ . Компоненты тензора, их преобразование при замене базиса.
38. Симметрические и кососимметрические тензоры. Симметризация и альтернирование тензоров.
39. Внешнее умножение, его свойства. Внешнее произведение ковекторов, его связь с определителями.
40. Базис и размерность пространства внешних форм.
41. Канонический вид кососимметрической билинейной функции, приведение к каноническому виду с использованием внешнего умножения.

## Список литературы

- [1] А. И. Кострикин, *Введение в алгебру, ч. II: Линейная алгебра*, М., Физматлит, 2000.
- [2] Э. Б. Винберг, *Курс алгебры*, М., Факториал Пресс, 2002.
- [3] А. И. Кострикин, Ю. И. Манин, *Линейная алгебра и геометрия*, М., Наука, 1986.
- [4] *Сборник задач по алгебре* (под ред. А. И. Кострикина), М., Физматлит, 2001.