

Программа экзамена по курсу «Линейная алгебра и геометрия»

1 курс, поток ФММФ, 141 группа, весна 2022 г.

Лектор Д. А. Тимашёв

1. Векторные пространства: определение и примеры. Базис и размерность векторного пространства, координаты вектора в базисе, изоморфизм пространств одной размерности.
2. Матрица перехода от одного базиса к другому, её свойства. Преобразование координат вектора при замене базиса.
3. Подпространства в векторном пространстве, их суммы и пересечения. Размерность подпространства. Существование базиса, согласованного с одним и двумя подпространствами. Формула Грассмана для размерностей суммы и пересечения.
4. Факторпространства, их размерность. Коразмерность подпространства.
5. Линейно независимые подпространства. Прямая сумма векторных пространств (внутренняя и внешняя). Факторизация по прямым слагаемым.
6. Линейные функции. Сопряжённое пространство, его размерность, двойственный базис. Канонический изоморфизм между векторным пространством и его вторым сопряжённым.
7. Аннулятор подпространства, его свойства. Задание подпространства системой однородных линейных уравнений.
8. Линейные отображения, их задание матрицами, операции над ними. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базисов.
9. Ядро и образ линейного отображения, их размерности, ранг линейного отображения. Критерии инъективности, сюръективности и биективности линейного отображения. Геометрическая структура и канонический вид матрицы линейного отображения.
10. Сопряжённое линейное отображение, его матрица, ядро и образ. Дважды сопряжённое отображение.
11. Линейные операторы, их матрицы. Алгебра линейных операторов на векторном пространстве. Определитель и след линейного оператора. Невырожденные операторы.
12. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения.
13. Характеристический многочлен. Алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения.
14. Линейная независимость собственных подпространств. Диагонализуемые линейные операторы, случай простого спектра. Проекторы.
15. Корневые векторы и корневые подпространства, их свойства. Разложение векторного пространства в прямую сумму корневых подпространств.
16. Циклические подпространства и жорданов базис для нильпотентного оператора.
17. Жорданова нормальная форма линейного оператора.
18. Комплексификация вещественных векторных пространств и линейных операторов. Существование инвариантного подпространства размерности ≤ 2 для линейного оператора на вещественном векторном пространстве.
19. Многочлены от линейных операторов. Минимальный многочлен. Теорема Гамильтона–Кэли.
20. Аналитические функции от линейных операторов. Экспонента линейного оператора, её свойства.
21. Билинейные функции и их матрицы. Преобразование матрицы билинейной функции при замене базиса. Ранг билинейной функции. Билинейные функции и линейные отображения в сопряжённое пространство.
22. Симметрические и кососимметрические билинейные функции, их матрицы. Ортогональное дополнение к подпространству относительно симметрической или кососимметрической билинейной функции, его свойства.
23. Квадратичные функции, поляризация. Канонический вид симметрической билинейной и квадратичной функции.
24. Методы Лагранжа и Якоби приведения квадратичной функции к каноническому виду.
25. Нормальный вид симметрической билинейной и квадратичной функции в комплексном и вещественном векторном пространстве. Закон инерции.
26. Положительно определённые билинейные и квадратичные функции. Критерий Сильвестра.

27. Евклидовы векторные пространства: определение и примеры. Неравенство Коши–Буняковского. Длина и угол между векторами, их свойства.
28. Ортогональность векторов. Ортогональное дополнение к подпространству, его свойства. Ортогональная проекция. Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы.
29. Матрица и определитель Грама системы векторов евклидова пространства, их свойства. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта.
30. Угол между вектором и подпространством.
31. Соответствие между операторами и билинейными функциями в евклидовом пространстве. Сопряжённый оператор, его свойства.
32. Ортогональные операторы. Канонический вид матрицы ортогонального оператора.
33. Симметрические и кососимметрические операторы, канонический вид их матриц. Приведение симметрической билинейной или квадратичной функции к главным осям.
34. Неотрицательные и положительно определённые симметрические операторы, извлечение корней.
35. Полярное разложение невырожденного линейного оператора в евклидовом пространстве.
36. Псевдоевклидовы векторные пространства. Изотропные векторы и подпространства.
37. Канонический вид кососимметрической билинейной функции. Симплектические векторные пространства, их размерность. Изоморфизм симплектических пространств одной размерности.
38. Изотропные и лагранжевы подпространства в симплектическом пространстве.
39. Комплексно сопряжённое векторное пространство. Полулинейные и полуторалинейные функции, их матрицы. Эрмитовы и косоэрмитовы функции, их нормальный вид.
40. Эрмитовы векторные пространства. Полуторалинейные функции и линейные операторы в эрмитовом пространстве, сопряжённый оператор. Унитарные, эрмитовы, косоэрмитовы, нормальные операторы.
41. Полярное разложение невырожденного линейного оператора в эрмитовом пространстве, случай нормального оператора. Комплексификация евклидовых пространств и операторов в них.
42. Аффинные пространства. Векторизация. Реперы и системы координат в аффинном пространстве. Преобразование координат при замене репера.
43. Плоскости в аффинных пространствах, способы их задания. Взаимное расположение плоскостей.
44. Евклидовы аффинные пространства. Расстояние между точками и между плоскостями.
45. Объём параллелепипеда в евклидовом пространстве.
46. Аффинные отображения, их дифференциалы. Аффинные преобразования, их структура.
47. Движения евклидовых аффинных пространств. Ось движения и вектор скольжения.
48. Классификация движений 2-мерного и 3-мерного евклидова пространства.
49. Квадратичные функции в аффинных пространствах. Центр квадратичной функции.
50. Приведение квадратичной функции в аффинном пространстве к каноническому или нормальному виду и к главным осям.
51. Квадрики в аффинном пространстве, их классификация. Единственность уравнения, задающего квадрику.
52. Понятие тензора. Тензоры малых валентностей. Арифметические операции над тензорами, тензорное умножение.
53. Тензорный базис и размерность пространства тензоров типа (p, q) . Компоненты тензора, их преобразование при замене базиса.
54. Свёртка тензоров. Интерпретация различных операций линейной алгебры в терминах тензорного умножения и свёртки. Подъём и опускание индексов.
55. Симметрические и кососимметрические тензоры. Симметризация и альтернирование тензоров.
56. Внешнее умножение, его свойства. Внешнее произведение векторов и ковекторов, его связь с определителями.
57. Базис и размерность пространства кососимметрических тензоров.
58. Критерии линейной независимости набора векторов и принадлежности вектора подпространству в терминах внешнего умножения. Соответствие между подпространствами и вполне разложимыми поливекторами.

Список литературы

- [1] Э. Б. Винберг, *Курс алгебры*, М., МЦНМО, 2017.
- [2] А. И. Кострикин, *Введение в алгебру, ч. II: Линейная алгебра*, М., Физматлит, 2000.
- [3] А. И. Кострикин, Ю. И. Манин, *Линейная алгебра и геометрия*, М., Наука, 1986.
- [4] *Сборник задач по алгебре* (под ред. А. И. Кострикина), М., МЦНМО, 2009.