

Программа спецкурса
«Представления алгебраических групп»
2020/2021 уч. год
Лектор Д. А. Тимашёв

Осенний семестр: «Представления классических групп»

- 1) Изотипное разложение вполне приводимого представления. Неприводимые представления прямого произведения групп.
- 2) Структура полупростых алгебр и их неприводимые представления. Приложение к теории представлений конечных групп.
- 3) Диаграммы, таблицы и симметризаторы Юнга, их свойства.
- 4) Взаимодействие симметризаторов Юнга, отвечающих разным диаграммам. Классификация неприводимых представлений симметрической группы S_m .
- 5) Реализация неприводимых представлений симметрической группы в модулях Шпехта.
- 6) Стандартные таблицы Юнга. Базис модуля Шпехта: доказательство линейной независимости.
- 7) Лемма Сильвестра, соотношения выпрямления. Завершение доказательства теоремы о базисе модуля Шпехта.
- 8) Правило ветвления для представлений симметрической группы. Восстановление неприводимого представления группы S_m по его ограничению на подгруппу S_{m-1} .
- 9) Размерность неприводимого представления симметрической группы: формула крюков.
- 10) Неприводимое представление симметрической группы, отвечающее крюку.
- 11) Неприводимые представления знакопеременной группы A_m : вложение в неприводимое представление группы S_m , разложение неприводимого S_m -модуля в прямую сумму неприводимых A_m -модулей.
- 12) Классификация неприводимых представлений знакопеременной группы.
- 13) Функторы Шура и модули Вейля. Неприводимость представления группы GL_n в модуле Вейля.
- 14) Рациональные и полиномиальные линейные представления группы GL_n . Матричные элементы представления. Реализация полиномиальных представлений в наборах ковариантных тензоров, полная приводимость рациональных представлений и классификация неприводимых представлений группы GL_n .
- 15) Обобщённые таблицы Юнга. Реализация модулей Вейля в алгебре многочленов от матричных элементов.
- 16) Полустандартные (обобщённые) таблицы Юнга. Базис модуля Вейля.
- 17) Многообразия флагов и флаговые мультиконусы, их задание алгебраическими уравнениями.
- 18) Представление группы GL_n и определяющие соотношения для алгебры многочленов на флаговом мультиконусе.
- 19) Характеристики линейных представлений группы GL_n , многочлены Шура — базис пространства симметрических многочленов. Линейное представление группы GL_n определяется своим характером.
- 20) Проблема разложения тензорного произведения неприводимых представлений. Формулы Пиери, примеры, формула Клебша–Гордана. Доказательство формул Пиери сведением к разложению произведения многочленов Шура.
- 21) Умножение полустандартных таблиц, умножение на строку или столбец.
- 22) Правило ветвления для представлений группы GL_n .
- 23) Формула Якоби–Труди для многочлена Шура.
- 24) Размерность модуля Вейля.

Весенний семестр: «Представления редутивных групп»

- 25) Косые диаграммы и таблицы Юнга, таблицы Яманучи. Биекция между полустандартными косыми таблицами Юнга данной формы и веса и парами полустандартных косых таблиц Яманучи той же формы и полустандартных таблиц Юнга того же веса.
- 26) Косые многочлены Шура, их свойства, выражение через обычные многочлены Шура.
- 27) Тождество Коши.
- 28) Правило Литтлвуда–Ричардсона.
- 29) Рациональные и полиномиальные линейные представления группы SL_n , классификация неприводимых представлений.
- 30) Полиномиальные инварианты системы векторов относительно групп O_n и Sp_n .
- 31) Эквивариантные гомоморфизмы пространств тензоров относительно групп O_n и Sp_n . Реализация неприводимых представлений групп O_n и Sp_n в пространствах тензоров.
- 32) Классификация неприводимых представлений группы Sp_n .
- 33) Классификация неприводимых представлений группы O_n .
- 34) Классификация неприводимых представлений группы SO_n .
- 35) Линейные группы Ли, примеры и простейшие свойства. Касательная алгебра Ли.
- 36) Экспоненциальное отображение.
- 37) Компоненты связности группы Ли. Пересечение групп Ли.
- 38) Линейные представления групп Ли и их дифференциалы. Присоединённое представление.
- 39) Компактные группы Ли: инвариантное интегрирование, оператор Рейнольдса, ортогонализуемость/унитаризуемость и полная приводимость линейных представлений.
- 40) Редутивные группы Ли. Полярное разложение редутивной группы.
- 41) Редутивность классических групп.
- 42) Полная приводимость представлений редутивных групп. Пространства матричных элементов. Полиномиальные и рациональные представления редутивной группы.
- 43) Соотношения ортогональности для матричных элементов неприводимых представлений компактной группы Ли. Полиномиальность непрерывных представлений компактной группы Ли и рациональность дифференцируемых представлений редутивной группы Ли.
- 44) Алгебраические торы и их линейные представления. Решётка весов.
- 45) Подалгебры Картана и максимальные торы в редутивных группах.
- 46) Корневое разложение и система корней редутивной группы, их свойства.
- 47) Треугольное разложение в редутивной группе Ли и её касательной алгебре Ли.
- 48) Старшие векторы и старшие веса. Классификация неприводимых представлений связанной редутивной группы.

В каждом билете по программе годового спецкурса будут два теоретических вопроса из программы и одна задача. В каждом билете по программе полугодового спецкурса (осенний или весенний семестр) будет один теоретический вопрос из программы и одна задача.