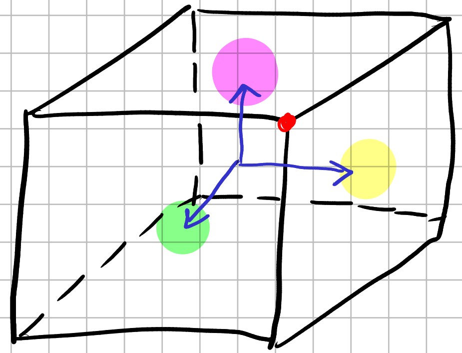
$$Sp_{2n}(\mathbb{K}) \subset SL_{2n}(\mathbb{K})$$

$$\underbrace{\omega\wedge\dots\wedge\omega}_{n} = \underset{\substack{\#\\0}}{C} \cdot \underbrace{x_1\wedge x_2\wedge\dots\wedge x_{2n}}_{\det}$$

сохр. при Sp_{2n}

сохр. при SL_{2n}



$$\mathrm{Isom}^+ C \simeq S_4 \twoheadrightarrow S_3$$

$\mathcal{F}$ = {функц на гранях куба} $= \mathcal{F}^+ \oplus \mathcal{F}^- = U^+ \oplus V^+ \oplus \mathcal{F}^-$

$$R = R_1 \oplus R_3 \oplus R_5$$

$$A = \mathcal{E},\ -\tfrac{1}{2}\mathcal{E},\ 0$$

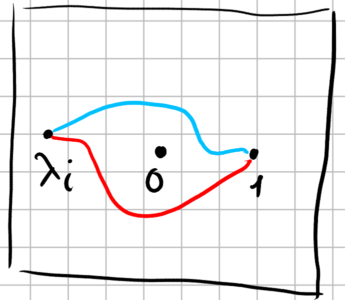
$$f = \overbrace{f_1 + f_3}^{\Downarrow} + f_5$$

$$A^N = \mathcal{E},\ \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^N}\mathcal{E},\ 0$$

$$Af(\Gamma_0) = \frac{1}{4}\sum_{\Gamma \text{ сос. с } \Gamma_0} f(\Gamma)$$

$$A^N f = f_1 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^N f_3$$

$$O_n(\mathbb{R}) = \underbrace{\overset{\det = 1}{SO_n(\mathbb{R})}}_{\substack{\shortparallel \\ O_n(\mathbb{R})^\circ}} \sqcup \overset{\det = -1}{O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R})}$$



<u>Выяснить связность следующих групп Ли :</u>

$$GL_n(\mathbb{C}) \ni g = c \cdot g' \cdot c^{-1}, \quad g' = \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc} \lambda_1 & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_1 \end{array} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{array}{ccc} \lambda_s & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_s \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_i \neq 0$$

$$\lambda_i = e^{\mu_i}$$

$$\lambda_i(t) = e^{t\mu_i}$$

$$g'(t) = \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc} \lambda_1(t) & t & 0 \\ & \ddots & t \\ 0 & & \lambda_1(t) \end{array} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{array}{ccc} \lambda_s(t) & t & 0 \\ & \ddots & t \\ 0 & & \lambda_s(t) \end{array} \end{pmatrix}$$

соед. g' $(t=1)$

с E $(t=0)$

$$\Longrightarrow g(t) = c \cdot g'(t) \cdot c^{-1} \text{ соед. } g \text{ с } E$$

$$GL_n(\mathbb{C}) \ni g = g_1^{-1} \cdot \ldots \cdot g_N^{-1} \qquad g(t) = g_1(t) \cdot \ldots \cdot g_N(t) \text{ соед. } g \text{ с } E$$

$=1$

$\times\mu$

$$g \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} E = \underset{\uparrow}{g_N} \cdot \ldots \cdot \underset{\uparrow}{g_2} \cdot \underset{\uparrow}{g_1} \cdot g \Rightarrow g = \underset{\uparrow}{g_1^{-1}} \cdot \ldots \cdot \underset{\uparrow}{g_N^{-1}}$$

элем. матрицы — тоже элем. матрицы

$$g_i^{-1} = \cancel{\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & \cdots & 1 & \\ & \vdots & 1 & \vdots & \\ & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & \cdots & \lambda & \\ & & \ddots & \vdots & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \cancel{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}$$

ЭП2 — ЭП1 — при $\det g = 1$ — ЭП3 $(\lambda \neq 0)$

Связность $SL_n(\mathbb{C})$

$\det g = 1$

$\det g(t) = 1$

$$g_i(t) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & \cdots & \lambda t & \\ & & \ddots & \vdots & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda(t) & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda(t)$ соед. λ с 1 на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Найти компоненты связности у $O_n(\mathbb{C})$

Дост. д-ть её связность $\longrightarrow$ $SO_n(\mathbb{C}) = O_n(\mathbb{C})^\circ$

$O_n(\mathbb{C}) \setminus SO_n(\mathbb{C})$ — др. св. компонента

Указание: 1) Вначале разобраться с группой $SO_2(\mathbb{C})$, понять её топ. структуру

2) Применить метод д-ва связности как для $GL_n(\mathbb{C})$ и $SL_n(\mathbb{C})$ (привести $g \in SO_n(\mathbb{C})$ к E простыми преобразованиями)

$$\exp : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{K})$$

$$\exp(X) = E + X + \frac{1}{2}X^2 + \ldots + \frac{1}{k!}X^k + \ldots$$

$G \subset GL_n(\mathbb{K})$ — группа Ли

$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ — её касат. алгебра Ли

$$\Longrightarrow \quad \exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$$

Группа Гейзенберга $H_n(\mathbb{K}) = \left\{ g = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_n & z \\ & 1 & & 0 & y_1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & 1 & y_n \\ & & & & 1 \end{pmatrix},\ x_i, y_i, z \in \mathbb{K} \right\}$

1) Д-ть, что $H_n(\mathbb{K})$ — группа Ли
2) Вычислить $\mathfrak{h}_n(\mathbb{K})$
3) Вычислить $\exp: \mathfrak{h}_n \longrightarrow H_n$

$$\mathfrak{h}_n = \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n & z \\ & & & & y_1 \\ & & 0 & & \vdots \\ & & & & y_n \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$g \cdot g' = \begin{pmatrix} 1 & x_1 + x_1' & \cdots & x_n + x_n' & z + z' + x_1 y_1' + x_2 y_2' + \ldots + x_n y_n' \\ & 1 & & 0 & y_1 + y_1' \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & 1 & y_n + y_n' \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x_1 & \cdots & -x_n & \sum_i x_i y_i - z \\ & 1 & & 0 & -y_1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & 1 & -y_n \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n & z \\ & & & & y_1 \\ & & 0 & & \vdots \\ & & & & y_n \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad \exp(X) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_n & z + \frac{1}{2}\sum_i x_i y_i \\ & 1 & & 0 & y_1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & 1 & y_n \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \sum_i x_i y_i \\ & & & & 0 \\ & & 0 & & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$X^3 = \begin{pmatrix} & & \\ & 0 & \\ & & \end{pmatrix}$$

Представление группы Ли $G = \mathbb{R}$ (по сложению)

$$R : G \longrightarrow GL(V)$$

$$R(t) = \exp(tA), \quad A = dR(1) \text{ — лин. опер. на } V \quad (\text{генератор } R)$$

$$dR : \mathfrak{g} = \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

Задача $g(t) \in GL(V)$ — дифф. кривая. Задает ли она лин. предст. R?

$$g(t+s) = g(t) \cdot g(s)$$

т.е. верно ли, что $g(t) = R(t)$

Нужно, чтобы $g(t) = \exp(tA)$ для нек. A

$$A = \dot{g}(0)$$

Пример $\quad g(t) = \begin{pmatrix} ch(t) & sh(t) \\ sh(t) & ch(t) \end{pmatrix}$

да

Задаёт ли лин. предст. группы Ли $G = \mathbb{R}$?

$$\dot g(0) = \begin{pmatrix} sh(t) & ch(t) \\ ch(t) & sh(t) \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots = ch(t) & t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots = sh(t) \\ sh(t) & ch(t) \end{pmatrix} = g(t)$$

$$tA = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2!} \quad (tA)^2 = \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3!} \quad (tA)^3 = \begin{pmatrix} 0 & t^3 \\ t^3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$