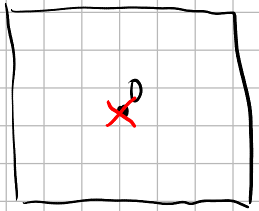
Связность $SO_n(\mathbb{C})$

$a, b \in \mathbb{C}$

$$SO_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ \underbrace{a^2+b^2}_{\underbrace{(a+bi)}_{=c}\cdot\underbrace{(a-bi)}_{=c^{-1}}} = 1 \right\}$$

$$SO_2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{\times}$$

связно



$c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\begin{cases} a = \dfrac{c+c^{-1}}{2} \\ b = \dfrac{c-c^{-1}}{2i} \end{cases}$$

Общий случай:

$$SO_n(\mathbb{C}) \ni g = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} \vdots & & \\ x & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \\ y & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} i \\ \\ j \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \vdots & & \\ z & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix} \begin{array}{c} i \\ \\ j \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & g' \in SO_{n-1}(\mathbb{C}) & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

$$\times \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} i \\ j \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & a & & -b & \\ & & 1 & & \\ & b & & a & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\supset SO_2(\mathbb{C})$

$$x^2+y^2 \neq 0$$

$$= z^2$$

$(g_{11}, \ldots, g_{n1})$

$$\forall i,j:\ g_{i1}^2 + g_{j1}^2 = 0$$

$$(n-1)\cdot(\underbrace{g_{11}^2+\ldots+g_{n1}^2}_{=1}) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_N, \qquad g_i \in \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & a & & b & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & b & & a & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

соед. внутри $SO_2(\mathbb{C})$ кривой $g_i(t)$ с E

соед. кривой $g(t) = g_1(t) \cdot \ldots \cdot g_N(t)$ с E

$$O_{p,q}(\mathbb{R}) \ni g = \begin{array}{c} \\ p\{ \\ q\{ \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \overset{v_1 \ \ldots \ v_p}{\det \neq 0} & \\ \hline & \end{array}\right), \qquad \underbrace{}_{p} \ \underbrace{}_{q}$$

$$\begin{cases} (v_i | v_i) = 1 \\ (v_i | v_j) = 0 \quad \text{при } i \neq j \end{cases}$$

$v_i \longleftarrow e_i, \quad i = 1, \ldots, p$

Псевдоскал. умн. $(x|y) = x_1y_1 + \ldots + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} - \ldots - x_ny_n$

полож. опр. на $\langle e_1, \ldots, e_p \rangle$ и на $\langle v_1, \ldots, v_p \rangle$

Линейные представления группы Ли SL_2 и алгебры Ли sl_2

$$R : SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow GL(V)$$

Характер $\chi_R(g) = \operatorname{tr} R(g)$, $\forall g \in SL_2(\mathbb{C})$

соб. знач.: z, z^{-1}

Достаточно вычислять χ_R на матрицах g с $z \neq z^{-1}$ и даже на диаг. м-цах h

Если $z \neq z^{-1}$, т.е. $z \neq \pm 1$, то
$$c^{-1} \cdot g \cdot c = h = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}$$

многочлен $\det(tE - g) \in \mathbb{C}[t]$ не имеет кратн. корней, т.е. $\mathcal{D} \neq 0$

$$\det(tE-g) = t^2 - (\operatorname{tr} g)t + \det g, \quad \det g = 1$$

$$\mathcal{D} = \underbrace{(\operatorname{tr} g)^2 - 4}_{\text{многочлен от } g_{ij}}$$

Матрицы с пр. спектром образуют откр. плот. под-во в $SL_2(\mathbb{C})$

$R = R_n$ — представление в пр-ве $V(n)$ с базисом $v_0, v_1, \ldots, v_n$

Соб. знач. $dR_n(Z)$: $n, n-2, \ldots, -n$

Соб. знач. $R_n(h)$: $z^n, z^{n-2}, \ldots, z^{-n}$

$$R_n(h) = \exp t \cdot dR_n(Z)$$

$$h = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} = \exp(tZ)$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$z = e^t \quad (t \in \mathbb{C})$$

$$\chi_{R_n}(h) = z^n + z^{n-2} + \ldots + z^{-n} = z^{-n}\,\frac{z^{2n+2}-1}{z^2-1} = \frac{z^{n+2} - z^{-n}}{z^2-1} = \frac{z^{n+1} - z^{-n-1}}{z - z^{-1}}$$

$$g = c \cdot h \cdot c^{-1} \implies \chi_{R_n}(g) = \chi_{R_n}(h)$$

Для матриц g с пр. спектром

$\implies$ и для $\forall g \in SL_2(\mathbb{C})$

Случай треугольного представления

$$R = R_{n_1} \oplus \dots \oplus R_{n_s} \Rightarrow \chi_R(g) = \chi_{R_{n_1}}(g) + \dots + \chi_{R_{n_s}}(g)$$

$$= \frac{z^{n_1+1} + \dots + z^{n_s+1} - z^{-n_1-1} - \dots - z^{-n_s-1}}{z - z^{-1}}$$

$$\Rightarrow \chi_R(g)\cdot(z - z^{-1}) = \sum_{i=1}^{s} z^{n_i+1} - \sum_{i=1}^{s} z^{-n_i-1}$$

Сл-е Лин. предст. R группы $SL_2(\mathbb{C})$ однозначно восстан. по χ_R

Задача $R_n \otimes R_m$ — разложить на неприв. слагаемые

Решение: $\chi_{R_n \otimes R_m} = \chi_{R_n} \cdot \chi_{R_m} = \frac{z^{n+1} - z^{-n-1}}{z - z^{-1}} \cdot \frac{z^{m+1} - z^{-m-1}}{z - z^{-1}} =$

$$\Rightarrow \chi_{R_n \otimes R_m} \cdot (z - z^{-1}) = (z^{n+1} - z^{-n-1})(z^m + z^{m-2} + \dots + z^{-m}) =$$

$$= z^{n+m+1} + z^{n+m-1} + \dots + z^{n-m+1} - z^{-n-m-1} - z^{-n-m+1} - \dots - z^{-n+m-1}$$

$$= z^{n+m+1} + z^{n+m-1} + \ldots + z^{n-m+1} - z^{-n-m-1} - z^{-n-m+1} - \ldots - z^{-n+m-1}$$

Б.о.о. $n \geq m \Rightarrow$ все степени здесь >0, а здесь <0

$$R_n \otimes R_m = R_{n+m} \oplus R_{n+m-2} \oplus R_{n+m-4} \oplus \ldots \oplus R_{n-m}$$

<u>формула Клебша–Гордана</u>

<u>Задача:</u> Разложить на неприв. слагаемые

$$\underbrace{R_1 \otimes R_2} \otimes R_3 = (R_3 \oplus R_1) \otimes R_3 = (R_3 \otimes R_3) \oplus (R_1 \otimes R_3) =$$

$$= (R_6 \oplus R_4 \oplus R_2 \oplus R_0) \oplus (R_4 \oplus R_2)$$

$$= R_6 \oplus R_4^{\oplus 2} \oplus R_2^{\oplus 2} \oplus R_0$$

$$\underbrace{V(n)\otimes V(m)}_{\substack{\| \qquad\qquad \| \\ \mathbb{C}[x_1,y_1]_n \quad \mathbb{C}[x_2,y_2]_m}} \simeq \underbrace{V(n+m)}_{\Downarrow\ v_0\otimes w_0} \oplus V(n+m-2) \oplus \dots$$

$\Downarrow\,?$

найти старшие векторы

$\mathbb{C}[\underbrace{x_1,y_1},\underbrace{x_2,y_2}]_{n,m}$

Базисы в $V(n)$: $v_0, v_1, \dots, v_n$

в $V(m)$: $w_0, w_1, \dots, w_m$

в $V(n)\otimes V(m)$: $v_i \otimes w_j$, $i=0,\dots,n$, $j=0,\dots,m$

$$\Downarrow$$

$$u = \sum_{i,j} c_{ij}\cdot v_i\otimes w_j \overset{Z}{\longmapsto} \sum_{i,j} c_{ij}\cdot \underline{Z(v_i\otimes w_j)}$$

$$X\cdot u = 0$$

$$Z\cdot u = \lambda\cdot u$$

$$\| $$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tZ)u$$

$$Z(v_i\otimes w_j) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left[\exp(tZ)v_i \otimes \exp(tZ)w_j\right]$$

$$\exp(tZ)v_i = \underline{v_i + tZ\cdot v_i + \dots} \qquad \exp(tZ)w_j = \underline{w_j + tZ\cdot w_j + \dots}$$

$$Zv_i\otimes w_j + v_i\otimes Zw_j = (\underline{n-2i+m-2j})\, v_i\otimes w_j$$

$$u = a\cdot v_0\otimes w_1 + b\cdot v_1\otimes w_0$$

$$X\cdot u = a\cdot \cancel{Xv_0\otimes w_1} + a\cdot v_0\otimes \underbrace{Xw_1}_{m\cdot w_0} + b\cdot \underbrace{Xv_1}_{n\cdot v_0}\otimes w_0 + b\cdot \cancel{v_1\otimes Xw_0}$$

$a = n$

$b = -m$