

## Программа спецкурса “Пучки и кохомологии”

2012/2013 уч. год.

Лектор Д. А. Тимашёв

1. Категории, функторы, естественные преобразования (определения и примеры).
2. Предпучки и пучки на топологических пространствах, примеры. Гомоморфизмы предпучков и пучков.
3. Прямой предел индуктивной системы, его свойства.
4. Стебли и ростки сечений предпучка. Пучок ростков, его свойства.
5. Окольцованные и локально окольцованные пространства, морфизмы между ними, примеры.
6. Пучки модулей на локально окольцованных пространствах. Пример: пучки локальных сечений векторных расслоений, их характеристика как локально свободных пучков модулей.
7. Факторпучки. Ядра и образы гомоморфизмов пучков.
8. Прямые суммы и тензорные произведения пучков. Пучок локальных гомоморфизмов.
9. Прямой и обратный образы пучка.
10. Элементы гомологической алгебры: комплексы, точные последовательности и резольвенты, гомологии и кохомологии, длинная точная последовательность (ко)гомологий, лемма “ $3 \times 3$ ”.
11. Функтор глобальных сечений, его аддитивность и точность слева, нарушение точности справа.
12. Вялые пучки, их свойства.
13. Вялая резольвента Годамана. Определение кохомологий пучка. Основные свойства кохомологий (аддитивность, функториальность, длинная точная последовательность).
14. Вычисление кохомологий с помощью ациклических резольвент.
15. Паракомпактные пространства, их свойства и примеры. Продолжение сечения пучка на замкнутом подмножестве паракомпактного пространства в его окрестность.
16. Мягкие пучки, их свойства.

17. Мягкость вялых и тонких пучков на паракомпактных пространствах.
18. Ацикличность вялых и мягких пучков.
19. Примеры мягких пучков на многообразиях. Когомологии де Рама, их связь с пучковыми когомологиями.
20. Сингулярные гомологии и когомологии, их простейшие свойства, гладкая и пучковая версии.
21. Связь сингулярных когомологий с пучковыми.
22. Теорема де Рама.
23. Спектральная последовательность фильтрованного комплекса.
24. Применения спектральных последовательностей: длинная точная последовательность когомологий, спектральные последовательности бикомплекса, гиперкогомологии, вычисление когомологий с помощью ациклических резольвент.
25. Точная последовательность Майера–Вьеториса.
26. Комплекс и резольвента Чеха для (открытого или локально конечного замкнутого) покрытия с коэффициентами в пучке.
27. Когомологии Чеха покрытия. Спектральная последовательность Чеха. Теорема Лере.
28. Поведение когомологий Чеха при измельчении покрытия. Когомологии Чеха пространства с коэффициентами в пучке.
29. Сравнение когомологий Чеха с пучковыми.
30. Теорема Картана об ацикличности покрытия.
31. Бикомплекс Дольбо–де Рама на комплексном многообразии. Лемма Дольбо и её следствия. Вычисление когомологий локально свободных пучков с помощью резольвенты Дольбо.
32. Когерентные пучки. Многообразие Штейна. Теоремы А и В Картана (без доказательства).
33. Теорема конечности Картана–Серра (доказательство для пучков сечений линейных расслоений на компактных римановых поверхностях).
34. Двойственность Серра.

35. Мероморфные функции. Задача Миттаг-Леффлера и первая проблема Кузена.
36. Когомологии линейных расслоений на  $\mathbb{C}P^n$  (вычисления Серра).
37. Неабелевы когомологии пучков групп. Классификация векторных расслоений. Группа Пикара.
38. Экспоненциальные последовательности. Характеристические классы (Штифеля–Уитни и Чжэня) линейных расслоений. Топологическая и гладкая классификации линейных расслоений.
39. Классификация линейных расслоений на  $\mathbb{C}P^n$ .
40. Мероморфные сечения линейных расслоений. Задача Вейерштрасса и вторая проблема Кузена.
41. Наличие мероморфного сечения у линейного расслоения на компактной римановой поверхности.
42. Дивизор мероморфного сечения. Соответствие между линейными расслоениями и дивизорами на компактной римановой поверхности.
43. Род римановой поверхности, его топологическая инвариантность.
44. Теорема Римана–Роха.
45. Приспособленные к односторонне точному функтору классы объектов абелевой категории. Производные функторы, их свойства.
46. Инъективные и проективные объекты, их свойства.
47. Независимость производных функторов от выбора приспособленного класса и резольвенты.
48. Функторы  $\text{Ext}^*$  и  $\text{Tor}_*$  на категории модулей.
49. Высшие прямые образы пучков, их структура.
50. Наличие достаточного количества инъективных объектов в категории пучков модулей. Функторы  $\text{Ext}^*$  и  $\mathcal{E}xt^*$ .
51. Спектральная последовательность Гротендика.
52. Спектральная последовательность Лере. Спектральная последовательность локально тривиального расслоения, случай гомологически простого расслоения.
53. Умножение в когомологиях пучков.
54. Кольцо когомологий группы  $SU_n(\mathbb{C})$ .

## Список литературы

- [Бр] Г. Бредон, *Теория пучков*, Наука, Москва, 1988.
- [ГМ] С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин, *Методы гомологической алгебры*, Наука, Москва, 1988.
- [ГРо] Р. Ганнинг, Х. Росси, *Аналитические функции многих комплексных переменных*, Мир, Москва, 1969.
- [ГРе] Х. Грауерт, Р. Реммерт, *Теория пространств Штейна*, Наука, Москва, 1989.
- [ГХ] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, т. 1, 2, Мир, Москва, 1982.
- [Го] Р. Годеман, *Алгебраическая топология и теория пучков*, Иностр. лит., Москва, 1961.
- [Да] В. И. Данилов, *Когомологии алгебраических многообразий*, *Соврем. пробл. мат. Фундам. направл.*, т. 35, с. 5–130, ВИНТИ, Москва, 1989.
- [Ла] И. Ламбек, *Кольца и модули*, Мир, Москва, 1971.
- [Ль] С. М. Львовский, *Введение в когомологии пучков*, МЦНМО, Москва, 2000.
- [Ма] Б. Мальгранж, *Лекции по теории функций нескольких комплексных переменных*, Наука, Москва, 1969.
- [На] С. М. Натанзон, *Введение в пучки, расслоения и классы Черна*, МЦНМО, Москва, 2010.
- [Уо] Ф. Уорнер, *Основы теории гладких многообразий и групп Ли*, гл. 5, Мир, Москва, 1987.
- [Фо] О. Форстер, *Римановы поверхности*, Мир, Москва, 1980.
- [Ха] Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, гл. II, III, Мир, Москва, 1981.