Фактор-группа, теорема о гомоморфизме, конечнопорождённые абелевы группы.

Теорема 1. *(Теорема о гомоморфизме.)*

Пусть G и H группы. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi\colon G \to H$. Тогда $\mathrm{Ker}\varphi$ *есть нормальная подгруппа в G,* $\mathrm{Im}\varphi$ *– подгруппа в H, причём* $G/\mathrm{Ker}\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi$.

Задача 1. Найдите с помощью теоремы о гомоморфизме фактор группу $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}/\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Задача 2. а) Докажите, что подгруппа $\mathrm{Int}(G)$ внутренних автоморфизмов группы G нормальна в группе $\mathrm{Aut}(G)$ всех автоморфизмов G.

б) Докажите, что $Z(G)$ – нормальная подгруппа в G. Докажите, что

$$G/Z(G) \cong \mathrm{Int}(G).$$

Задача 3. * Пусть S – полугруппа. Введите понятия аналогичные нормальной подгруппе и фактор группе для полугрупп и сформулируйте (и докажите) теорему о гомоморфизме для полугрупп.

Задача 4. Пусть U – множество комплексных чисел с модулем 1; H_n – множество комплексных чисел с аргументами $2\pi k/n, k \in \mathbb{Z}$; $U_n = H_n \cap U$. Докажите, что

а) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong U$;
б) $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times \cong U$;
в) $\mathbb{C}^\times/U \cong (\mathbb{R}_+, \cdot)$;
г) $U/U_n \cong U$;
д) $\mathbb{C}^\times/U_n \cong \mathbb{C}^\times$;
е) $\mathbb{C}^\times/H_n \cong U$
ж) $H_n/(\mathbb{R}_+, \cdot) \cong U_n$;
з) $H_n/U_n \cong (\mathbb{R}_+, \cdot)$.

Задача 5. * Доказать, что $S_4/V_4 \cong S_3$.

Теорема 2. *(Теорема о факторизации по сомножителям)*

Пусть $G_1, \ldots, G_n$ – группы, а $H_1, \ldots, H_n$ – их нормальные подгруппы. Тогда $(G_1 \times \ldots \times G_n)/(H_1 \times \ldots \times H_n) \cong G_1/H_1 \times \ldots \times G_n/H_n$.

Задача 6. Пусть A – свободная абелева группа с базисом $\{x_1, x_2, x_3\}$, B – её подгруппа, порождённая y_1, y_2, y_3. Найти, чему изоморфна группа A/B, если

а)
$$\begin{cases} y_1 = 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ y_2 = 21x_1 + 8x_2 + 9x_3 \\ y_3 = 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} y_1 = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ y_2 = 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 \\ y_3 = 8x_1 + 7x_2 + 9x_3 \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} y_1 = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \\ y_2 = 8x_1 + 9x_2 + x_3 \\ y_3 = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

Задача 7. В факторгруппе свободной абелевой группы A базисом x_1, x_2, x_3 по подгруппе B, порождённой $x_1 + x_2 + 4x_3$ и $2x_1 - x_2 + 2x_3$, найти порядок смежного класса $(x_1 + 2x_3) + B$.

Задачи для домашнего задания: 58.32, 58.33, 60.52(кроме а,б,д), 60.54.