Листок 1*

Линейные системы и определители малых порядков

Дополнительная часть

Здесь мы обсудим, как меняются площади плоских фигур и объемы трехмерных тел под действием линейных отображений. Что такое линейное отображение — будет сказано чуть ниже, а вот определять здесь *площадь* (или *объем*) я не хочу, поскольку это увело бы нас слишком далеко[1]. Пока я предлагаю ограничиться вашими школьными представлениями о площади и объеме (некоторые пояснения будут даны ниже после Теоремы 1).

Поскольку на лекциях пока не появились *векторные пространства*, линейные отображения у нас будут между плоскостями $\mathbb{R}^2$ или трехмерными пространствами $\mathbb{R}^3$.

Определение 1. Отображение $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ называется *линейным*, если выполняются следующие два условия:

(1) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ для любых векторов $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$;
(2) $T(\lambda v) = \lambda T(v)$ для любого вектора $v \in \mathbb{R}^2$ и числа $\lambda \in \mathbb{R}$.

Аналогично определяется линейное отображение $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Мы будем рассматривать линейные отображения, задаваемые матрицами. А именно, рассмотрим отображение $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, устроенное следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{T}{\mapsto} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Проверьте, что это действительно линейное отображение.

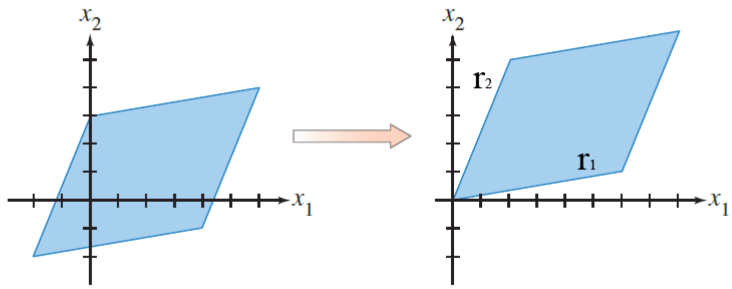
Теорема 1. *Пусть линейное отображение $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задано матрицей A. Если S — параллелограмм в $\mathbb{R}^2$, то*

$$\operatorname{vol}(T(S)) = \det A \cdot \operatorname{vol} S,$$

где vol *обозначает (ориентированную) площадь фигуры.*

Доказательство. Можем считать, что параллелограмм расположен как на рисунке справа,

[1] Этими вопросами занимается *теория меры*, на мехмате встречающаяся в курсах анализа. Вообще, теоремы из этого листка естественным образом обобщаются на любые измеримые по Лебегу подмножества $\mathbb{R}^n$, см. С. М. Львовский, *Лекции по математическому анализу*, МЦНМО (2013), Предложение 22.2.



то есть «натянут» на векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$:

$$S = \{\alpha_1\vec{r}_1 + \alpha_2\vec{r}_2 : 0 \leqslant \alpha_1, \alpha_2 \leqslant 1\}.$$

Посмотрим как действует T на точки S:

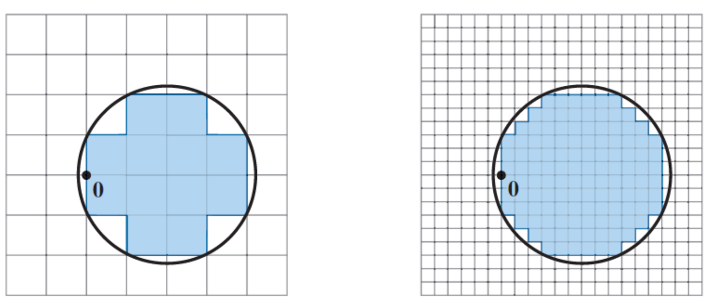
$$T(\alpha_1\vec{r}_1 + \alpha_2\vec{r}_2) = \{\text{по свойству линейности } T\} = \alpha_1 T(\vec{r}_1) + \alpha_2 T(\vec{r}_2) = \alpha_1 A\vec{r}_1 + \alpha_2 A\vec{r}_2.$$

Итак, $T(S)$ — параллелограмм, «натянутый» на векторы $A\vec{r}_1$ и $A\vec{r}_2$. Обозначим через $(\vec{u}, \vec{v})$ матрицу 2×2, первый столбец которой — вектор $\vec{u}$, а второй столбец — вектор $\vec{v}$. Тогда

$$\operatorname{vol} T(S) = \det(A\vec{r}_1, A\vec{r}_2) = \{\text{Проверьте!}\} = \det\Big(A \cdot (\vec{r}_1, \vec{r}_2)\Big) =$$
$$= \{\text{Определитель произведения равен произведению определителей}\} = \det A \cdot \operatorname{vol} S.$$

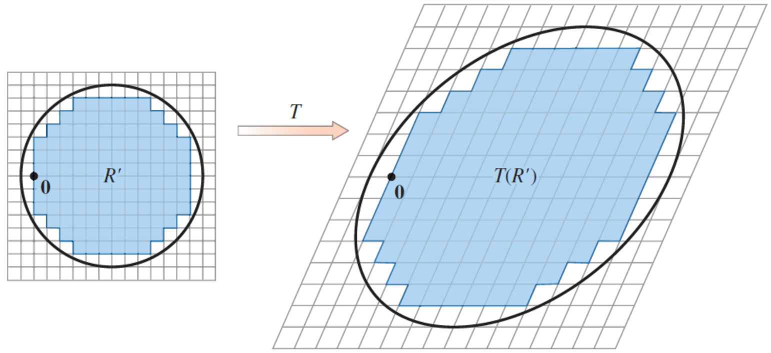
□

Обобщим теперь Теорему 1 на фигуры в $\mathbb{R}^2$, которые имеют более сложную границу (возможно, не состоящую из прямых линий). Это приводит нас к задаче нахождения площадей таких фигур. Как ее решать — вам расскажут в курсе анализа, а пока мы ограничимся наглядными соображениями. Итак, пусть R — «хорошая[2]» область на плоскости, имеющая конечную площадь. Замостим ее очень мелкими квадратиками, как показано на рисунке. Делая квадратики все меньше и меньше, а затем суммируя их площади, мы можем получить сколь угодно хорошее приближение к площади области R.



Фигура $T(R)$ теперь замощена *образами* квадратиков при отображении T. Если R' — объединение квадратиков внутри R, то площадь $T(R')$ равна $\det A \cdot \operatorname{vol} R'$ по Теореме 1. Кроме того, при подходящем измельчении квадратов, площадь $T(R)$ становится близка к площади $T(R')$.

[2] В этом месте нужно говорить умные слова типа «квадрируемые», «измеримые по Жордану» и пр. Читатель должен понимать, что описанный ниже трюк с замощением квадратами применим не к любой плоской фигуре, так что под «хорошестью» понимается применимость этой процедуры.



Итак, предельный переход позволяет строго доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Утверждение Теоремы 1 остается верным, если S — «хорошая» область в $\mathbb{R}^2$ с конечной площадью.*

Теперь — задачи.

Задача 1. Пусть S — параллелограмм, одна из вершин которого находится в начале координат, а две соседних имеют координаты $(1, 3)$ и $(5, 1)$. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите площадь образа S при отображении $\vec{v} \mapsto A\vec{v}$.

Задача 2. Зная, чему равна площадь круга радиуса 1, найдите площадь фигуры, ограниченной *эллипсом* — кривой, заданной уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Как вы понимаете, все наши определения и теоремы *дословно* переносятся на случай трехмерных тел в $\mathbb{R}^3$ и их объемов. Нужно только считать определители матриц 3×3.

Задача 3. Зная, чему равен объем шара радиуса 1, найдите объем тела в $\mathbb{R}^3$, ограниченного *эллипсоидом* — поверхностью, заданной уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$