Листок 2*

Рекуррентные последовательности и матрицы

Дополнительная часть

Язык матриц может быть весьма полезным при работе с *линейными рекуррентными последовательностями*. Неформально говоря, рекуррентная последовательность — это последовательность чисел, каждый член которой выражается через предыдущие заранее установленной формулой. Наиболее известный пример такой последовательности — числа Фибоначчи

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ 610,\ 987,\ 1597,\ 2584, \ldots,$$

Это последовательность, в которой первые два числа равны 0 и 1, а каждое последующее число равно сумме двух предыдущих. Обозначим через F_n число Фибоначчи под номером n. Тогда

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1},\quad n = 0, 1, 2\ldots$$

Рассмотрим теперь такую матрицу:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Преимущество такого подхода к числам Фибоначчи состоит в более быстром их вычислении: для нахождения F_n нужно порядка $\log n$ арифметических операций (а сколько операций нужно, если вычислять F_n по определению?)

Задача 1. Докажите *тождество Кассини*

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Рассмотрим теперь векторное пространство V бесконечных последовательностей вещественных чисел $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ с покоординатным сложением и умножением на скаляры. Пусть

$$W = \{x = (x_0, x_1, x_2, \ldots) \in V : x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \text{ для всех } n \geqslant 0\}.$$

Задача 2. Докажите, что W — подпространство в V, и что $\dim W = 2$.

Теперь — фокус. Будем искать в W базис, состоящий из векторов вида $u = (u_1, u_2, u_3, \ldots)$, где $u_n = \tau^n$, $n \geqslant 0$, для некоторого числа $\tau \in \mathbb{R}$. Такой базис действительно существует — это мы увидим чуть ниже. Заметим при этом, что из $u \in W$ следует условие

$$\tau^2 = \tau + 1.$$

Это уравнение имеет два корня

$$\tau_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \tau_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Задача 3. Проверьте, что векторы $u_1 = (\tau_1^0, \tau_1^1, \tau_1^2, \ldots)$ и $u_2 = (\tau_2^0, \tau_2^1, \tau_2^2, \ldots)$ образуют базис в пространстве W.

Из предыдущей задачи следует, что последовательность Фибоначчи $F = (F_0, F_1, F_2, \ldots)$ (которая, очевидно, принадлежит W) может быть записана в следующем виде:

$$F = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$$

для некоторых коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Задача 4. Найдите эти коэффициенты и докажите тем самым, что

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Эта формула обычно называется *формулой Бине*, хотя была известна еще Бернулли, Эйлеру и Муавру. Весьма замечательно, что формула Бине, хоть и содержит в себе радикалы, дает целое число для любого n.

Описанный выше метод годится не только для чисел Фибоначчи, но и для других рекуррентных последовательностей $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$, задаваемых формулой $x_{n+k} = a_{k-1}x_{n+k-1} + \ldots + a_0 x_n$, где $k, a_0, \ldots, a_{k-1}$ — некоторые константы (врочем, для некотрых последовательностей возникают тонкие моменты).

Задача 5. Попробуйте найти явную формулу для n-го члена следующих классических последовательностей.

(1) *Числа Пелля*

$$P_0 = 0,\ P_1 = 1,\ P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2},\ n > 1.$$

(2) *Числа Якобсталя*

$$J_0 = 0,\ J_1 = 1,\ J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2},\ n > 1.$$

Выведите аналоги тождества Кассини для этих чисел.

* * *