

Листок 5*

Модель Леонтьева

Дополнительная часть

1. История. Линейная алгебра является важнейшим инструментом математической экономики. Один из самых известных примеров ее применения — теория *межотраслевого баланса* («input-output» model), разработанная американским экономистом российского происхождения Василием Васильевичем Леонтьевым. За это в 1973 г. он получил Нобелевскую премию по экономике¹. Разработанный Леонтьевым метод был успешно применен в 30-е годы прошлого века для исследования экономики США. Впрочем, долгое время научное сообщество не воспринимало всерьез работы Леонтьева, поскольку в годы Великой депрессии гораздо большей популярностью пользовалась кейнсианская² точка зрения. И только в 1939 методом Леонтьева заинтересовалось бюро трудовой статистики США. Модель «затраты-выпуск» использовали для предсказания того, как всеобщая занятость по секторам будет изменяться в процессе перехода от мира к войне и наоборот. Интересно также отметить, что матрица «затраты-выпуск» использовалась правительством США для принятия решений об объеме и структуре поставок по ленд-лизу в послевоенное время.

2. Описание модели. Пусть экономика страны поделена на n секторов, каждый из которых производит некоторые товары или услуги, и пусть $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор, i -я координата которого обозначает количество произведенного сектором i товара в течение, скажем, года. Имеется также другая часть экономики, называемая *открытым сектором*, которая ничего не производит, а только потребляет товары и услуги. Обозначим через $d \in \mathbb{R}^n$ вектор конечного спроса, j -я координата которого обозначает количество товара, которое нужно открытому сектору от j -го сектора экономики.

Разумеется, в процессе производства каждый сектор экономики нуждается в продукции других секторов, что создает *промежуточный спрос* внутри активной части экономики. Вопрос Леонтьева состоял в следующем: существует ли уровень производства $x \in \mathbb{R}^n$, способный удовлетворить одновременно и конечный, и промежуточный спрос? Другими словами, мы хотим найти такой вектор x , что

$$\{\text{произведенное количество } x\} = \{\text{промежуточный спрос}\} + \{\text{конечный спрос } d\}$$

¹Еще один лауреат Нобелевской премии по экономике 1975 г. — советский математик и экономист Леонид Витальевич Канторович, получивший награду за создание *линейного программирования* (также использующего методы линейной алгебры).

²Джон Кейнс (1883-1946) — известный английский экономист. В своей знаменитой книге «Общая теория занятости, процента и денег» впервые в экономической науке доказывает необходимость государственного вмешательства в экономику.

В качестве простого примера рассмотрим экономику, состоящую из трех³ секторов — промышленность, сельское хозяйство и сфера услуг — с векторами потребления (consumption) $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ и $\mathbf{c}_3$.

Потребление единиц на единицу выпуска

Кто потребляет ↓	Промышленность	Сельское хозяйство	Услуги
Промышленность	0.5	0.4	0.2
Сельское хозяйство	0.2	0.3	0.1
Услуги	0.1	0.1	0.3

Данные этой таблицы следует понимать следующим образом: первый столбец — это вектор $\mathbf{c}_1$ потребления промышленного сектора, обозначающий, что в процессе производства промышленному сектору понадобилось 0.5 единиц выпуска этого же сектора, 0.2 единицы выпуска сельскохозяйственного сектора и 0.1 единица выпуска сектора услуг (здесь *единицами* измерения являются, например, млн. долларов США). Аналогично, второй и третий столбец соответствуют векторам потребления $\mathbf{c}_2$ и $\mathbf{c}_3$ двух других секторов.

Например, если промышленный сектор решит произвести 100 единиц продукции в год, то ему потребуется 100 $\mathbf{c}_1$ единиц продукции от остальных секторов, то есть 50 единиц продукции от различных частей промышленного сектора, 20 единиц от сельскохозяйственного сектора и 10 единиц от сферы услуг.

Таким образом, если i -й сектор экономики ($i = 1, 2, 3$) решит произвести x_i единиц выпуска, то

$$\text{Промежуточный спрос} = x_1 \mathbf{c}_1 + x_2 \mathbf{c}_2 + x_3 \mathbf{c}_3 = C \mathbf{x},$$

где C — это *матрица потребления* (consumption matrix), столбцы которой — векторы $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ и $\mathbf{c}_3$. Итак, **модель Леонтьева** может быть записана в виде простого матричного уравнения

$$\mathbf{x} = C \mathbf{x} + \mathbf{d}$$

$$\text{Произведено} = \text{Промежуточный спрос} + \text{Конечный спрос}$$

Это уравнение обычно переписывают в виде

$$(E - C) \mathbf{x} = \mathbf{d}.$$

Если матрица $E - C$ обратима, то мы получаем единственное решение $\mathbf{x} = (E - C)^{-1} \mathbf{d}$. Таким образом, с математической точки зрения, вопрос о существовании межотраслевого баланса $\mathbf{x}$ сводится к (а) вопросу об обратимости матрицы $E - C$ и (б) вопросу о неотрицательности вектора $\mathbf{x}$ (разумеется, в реальной жизни координаты $\mathbf{x}$ должны быть неотрицательны).

Теорема 1. Если все элементы матрицы потребления C неотрицательны, а сумма элементов каждого столбца меньше единицы, то матрица $(E - C)^{-1}$ существует, а вектор

$$\mathbf{x} = (E - C)^{-1} \mathbf{d}$$

имеет неотрицательные координаты.

³В реальной модели экономики США, которую анализировал Леонтьев, было более 500 секторов.

3. Как найти $(E - C)^{-1}$? Предположим, что для экономики установлен вектор спроса $\mathbf{d}$, и, в соответствии с этим спросом, секторы устанавливают производственный уровень $\mathbf{x} = \mathbf{d}$, в точности удовлетворяющий конечному спросу. Для достижения этого уровня $\mathbf{d}$ у секторов появляется промежуточный спрос $C\mathbf{d}$. Для удовлетворения этого промежуточного спроса, нужны новые ресурсы в размере $C(C\mathbf{d}) = C^2\mathbf{d}$ (*второй круг* промежуточного спроса), и так далее. Теоретически, этот процесс может быть бесконечным, однако в реальной жизни этого, конечно, не происходит. В результате конечный вектор производства выражается формулой

$$\mathbf{x} = \mathbf{d} + C\mathbf{d} + C^2\mathbf{d} + C^3\mathbf{d} + \dots = (E + C + C^2 + C^3 + \dots)\mathbf{d}. \quad (\star)$$

Чтобы придать смысл этому уравнению, рассмотрим равенство

$$(E - C)(E + C + C^2 + \dots + C^m) = E - C^{m+1}.$$

Задача 1. Докажите его. Сравните с Задачей 7 из Листка 5.

Можно показать, что если сумма элементов каждого столбца C строго меньше 1, то $E - C$ обратима и C^m стремится (поэлементно) к нулевой матрице при $m \rightarrow \infty$, так что $E - C^{m+1} \rightarrow E$ при $m \rightarrow \infty$. Стало быть,

$$(E - C)^{-1} \approx E + C + C^2 + C^3 + \dots + C^m,$$

если сумма элементов каждого столбца C меньше единицы. В реальности степени матрицы потребления C стремятся к нулю весьма быстро, поэтому предыдущая формула дает действенный способ приближенного вычисления $(E - C)^{-1}$. Более того, если элементы C и $\mathbf{d}$ неотрицательны, то равенство $(\star)$ показывает, что координаты $\mathbf{x} = (E - C)^{-1}\mathbf{d}$ также неотрицательны.

Задача 2. Пусть $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Докажите, что если все элементы A^m стремятся к нулю при $m \rightarrow \infty$, то матрица $E - A$ обратима.