

Листок 1

Линейные системы и определители малых порядков

Задача 1. Решите следующие системы линейных уравнений методом Крамера.

$$(a) \begin{cases} 5x + 7y = 3 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 4x + y = 6 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + y = 3 \\ -3x + 2z = 0 \\ y - 2z = 2 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x + 3y + z = 4 \\ -x + 2z = 2 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$

Задача 2. Найдите значение параметра t , при котором система имеет *единственное* решение (относительно x и y), и найдите это решение.

$$(a) \begin{cases} tx + 2ty = -1 \\ 3x + 6ty = 4 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} tx - 2y = 1 \\ 4tx + 4ty = 2 \end{cases}$$

Задача 3. Найдите многочлен $f(x)$ третьей степени, для которого

$$f(-2) = 1, \quad f(-1) = 3, \quad f(1) = 13, \quad f(2) = 33.$$

Задача 4. Найдите объем параллелепипеда, у которого одна из вершин находится в точке $(1, 1, 1)$, а три соседних имеют координаты $(2, 4, 1)$, $(-1, 1, 3)$ и $(0, 4, 0)$. Используйте определители!

Задача 5. Пусть S — треугольник на плоскости $\mathbb{R}^2$, вершины которого имеют координаты (x_1, y_1) , (x_2, y_2) и (x_3, y_3) . Покажите, что (ориентированная) площадь S равна

$$\pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Задача 6. Покажите, что уравнение прямой в $\mathbb{R}^2$, проходящей через различные точки (a_1, b_1) и (a_2, b_2) может быть записано в виде

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$