Листок 10

Классификация движений плоскости

Движением или *изометрией* евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ называется биективное отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, сохраняющее расстояние между точками. Изометрии удобно описывать, используя комплексные числа. Действительно, расстояние между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) равно

$$|z_1 - z_2|,$$

где $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2$. Значит, изометрии можно рассматривать как функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, для которых

$$|f(z_1) - f(z_2)| = |z_1 - z_2|, \quad \text{для любых } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Задача 1. Рассмотрим функции $f(z) = \alpha z + \beta$ и $h(z) = \alpha \bar{z} + \beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Какой геометрический смысл имеют коэффициенты α и β? Покажите, что при $|\alpha| = 1$ функции f и h задают изометрии.

Задача 2. Покажите, что изометрия f, оставляющая точки 0, 1 и i неподвижными, является тождественным отображением (то есть $f(z) = z$ для всех $z \in \mathbb{C}$).

Подсказка: Положив $f(z) = w$, запишите, что означают условия задачи в терминах модулей комплексных чисел. Получите отсюда, что $w = z$.

Задача 3. Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — изометрия. Рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{f(z) - f(0)}{f(1) - f(0)}.$$

Покажите, что g — изометрия.

Задача 4. Докажите, что либо $g(z) = z$, либо $g(z) = \bar{z}$. Используйте Задачи 2 и 3.

Из определения функции g и Задачи 4 вытекает следующий замечательный факт:

Теорема 1 (О классификации движений евклидовой плоскости). *Каждое движение плоскости имеет вид (в комплексных координатах)*

$$z \mapsto \alpha z + \beta \quad \text{или} \quad z \mapsto \alpha \bar{z} + \beta,$$

где $|\alpha| = 1$ и $\beta \in \mathbb{C}$ — любое число.

Вспоминая теперь геометрический смысл сложения, умножения и комплексного сопряжения комплексных чисел, мы получаем классическую *теорему Шаля*:

Следствие 1 (Теорема Шаля). *Всякое сохраняющее ориентацию движение плоскости представляет собой либо поворот (в частности, центральную симметрию) относительно некоторой точки, либо параллельный перенос. Всякое меняющее ориентацию движение плоскости является осевой или скользящей симметрией*[1].

[1]Скользящей симметрией называют композицию симметрии относительно некоторой прямой ℓ и переноса на вектор, параллельный ℓ (который может быть и нулевым).

Задача 5. Докажите, что изометрии плоскости образуют группу (иногда она обозначается $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$).

Задача 2 допускает важное обобщение:

Задача 6 ($\star$)**.** Докажите, что изометрия плоскости, фиксирующая три точки, не лежащие на одной прямой, является тождественным отображением.

Наконец, следующая задача говорит нам, что движение плоскости однозначно определяется тем, куда оно переводит любые три неколлинеарные точки.

Задача 7. Докажите, что если изометрии плоскости f_1 и f_2 равны в трех точках, не лежащих на одной прямой, то они равны всюду: $f_1(z) = f_2(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

Подсказка: Воспользуйтесь Задачей 6 и тем, что любая изометрия обратима (это, в частности, вы должны были проверить в Задаче 5).