Листок 16

Результант и дискриминант

1. Теоретическая часть

В этом Листке для простоты можно считать, что коэффициенты многочленов — комплексные числа. В частности, число корней многочлена (с учетом кратности) равно его степени.

1.1. **Результант.** Рассмотрим два многочлена

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m,$$

где $a_0, b_0 \neq 0$. Предположим, мы хотим узнать — имеют ли f и g общий корень? Мы знаем по меньшей мере два способа узнать это: 1) разложить оба многочлена на множители и 2) воспользоваться алгоритмом Евклида. Оба эти способа весьма трудоемки.

Если f и g имеют общий корень, то $f = hp$ и $g = hq$ для некоторых многочленов h, p, q. Следовательно, $fq = gp$, причем $\deg q \leqslant m-1$ и $\deg p \leqslant n-1$. С другой стороны, если f и g не имеют общих корней и $fq = gp = h$, то h делится на fg, а потому $\deg q \geqslant \deg g = m$ и $\deg p \geqslant \deg f = n$.

Пусть $q = u_0x^{m-1} + u_1x^{m-2} + \ldots + u_{m-1}$ и $p = v_0x^{n-1} + v_1x^{n-2} + \ldots + v_{n-1}$. Равенство $fq = gp$ можно записать в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} a_0u_0 &= b_0v_0, \\ a_1u_0 + a_0u_1 &= b_1v_0 + b_0v_1, \\ a_2u_0 + a_1u_1 + a_0u_2 &= b_2v_0 + b_1v_1 + b_0v_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Ввиду сказанного выше, многочлены f и g имеют общий корень тогда и только тогда, когда эта система имеет ненулевое решение $(u_0, u_1, \ldots, v_0, v_1, \ldots)$. Например, при $n = 2$, $m = 3$ определитель этой системы уравнений имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & -b_0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & -b_1 & -b_0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & -b_2 & -b_1 \\ 0 & a_2 & a_1 & -b_3 & -b_2 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & -b_3 \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \pm \det \mathrm{Syl}(f, g).$$

Матрицу $\mathrm{Syl}(f, g)$ называют *матрицей Сильвестра* многочленов f и g, а ее определитель — *результантом* $\mathrm{Res}(f, g)$ многочленов f и g. Таким образом,

Теорема 1. *Многочлены $f, g \in \mathbb{K}[x]$ с ненулевыми старшими коэффициентами имеют общий корень тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{Res}(f, g) = 0.$$

Аналогично определяется матрица Сильвестра и результант для многочленов f и g произвольной степени: в первую строку записываем коэффициенты f и начинаем их последовательно «сдвигать» вправо, заполняя пропуски нулями; затем то же самое делаем для g.

Несложно показать, что результант следующим образом выражается через корни многочленов:

Теорема 2. *Пусть x_i — корни многочлена f, y_j — корни многочлена g (где $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$). Тогда*

$$\operatorname{Res}(f, g) = a_0^m b_0^n \prod_{i,j} (x_i - y_j).$$

Это выражение часто берут за определение результанта.

1.2. **Теория исключений.** Результант может применяться для нахождения решений систем *полиномиальных* уравнений; соответсвующая теория называется теорией исключений переменных. Мы проиллюстрируем эту теорию на примере многочленов от двух переменных. Допустим, мы хотим найти решение системы

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \qquad f, g \in \mathbb{C}[x, y].$$

Запишем многочлены f и g как многочлены от x с коэффициентами в $\mathbb{C}[y]$:

$$f(x, y) = a_0(y)x^n + a_1(y)x^{n-1} + \ldots + a_n(y),$$
$$g(x, y) = b_0(y)x^m + b_1(y)x^{m-1} + \ldots + b_m(y).$$

Результант этих многочленов, рассматриваемых как многочлены от x, будет многочленом от y; мы обозначим его $\operatorname{Res}_x(f, g)$. Тогда

$$\operatorname{Res}_x(f, g) = F(y) \in \mathbb{C}[y].$$

Пусть наша система обладает решением $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Подставляя $y = \beta$ в наши многочлены, мы получим $f(x, \beta),\ g(x, \beta) \in \mathbb{C}[x]$. Эти многочлены обладают общим корнем α, а потому их результант, равный $F(\beta)$, должен быть равен нулю, то есть β *должно быть корнем результанта* $\operatorname{Res}_x(f, g)$.

Наоборот, если результант $\operatorname{Res}_x(f, g)$ обладает корнем β, то результант многочленов $f(x, \beta)$ и $g(x, \beta)$ равен нулю, то есть эти многочлены обладают общим корнем[1].

Пример 1. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} f = x^2y + 3xy + 2y + 3 = 0, \\ g = 2xy - 2x + 2y + 3 = 0 \end{cases}.$$

Имеем:

$$\operatorname{Res}_x(f, g) = \begin{vmatrix} y & 3y & 2y+3 \\ 2y-2 & 2y+3 & 0 \\ 0 & 2y-2 & 2y+3 \end{vmatrix} = 2y^2 + 11y + 12.$$

Корнями будут числа $\beta_1 = -4$ и $\beta_2 = -3/2$. Многочлены

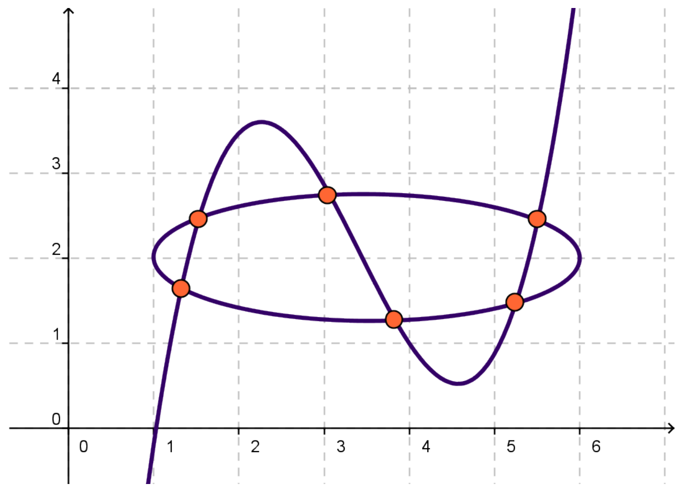
$$f(x, -4) = -4x^2 - 12x - 5,$$
$$g(x, -4) = -10x - 5$$

[1] Либо их старшие коэффициенты равны нулю: $a_0(\beta) = b_0(\beta) = 0$. Продумайте этот случай самостоятельно.

обладают общим корнем $\alpha_1 = -1/2$, а при подстановке $\beta_2 = -3/2$ получим общий корень $\alpha_2 = 0$. Таким образом, заданная система имеет два решения:

$$\left(-\frac{1}{2}, -4\right), \quad \left(0, -\frac{3}{2}\right).$$

1.3. **Несколько слов о геометрии: теорема Безу.** Множества решений полиномиальных уравнений $f(x, y) = 0$ и $g(x, y) = 0$ можно рассматривать как *плоские алгебраические кривые*. Степенью такой кривой назовем степень многочлена, который ее определяет. В геометрии имеется замечательная *теорема Безу*, которая утверждает, что *если число точек пересечения двух плоских алгебраических кривых степеней m и n конечно, то оно не превосходит mn.* Например, эллипс (кривая степени 2) и график кубического многочлена не могут пересекаться более чем в $2 \cdot 3 = 6$ точках:



1.4. **Дискриминант.** Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — все корни многочлена $f(x) = a_0x^n + \ldots + a_n$, $a_0 \neq 0$. Величину

$$\mathrm{D}(f) = a_0^{2n-2} \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2$$

называют *дискриминантом* многочлена f. Ясно, что $\mathrm{D}(f) = 0$ тогда и только тогда, когда f имеет кратные корни.

2. Задачи

Задача 1. Выведите из Теоремы 2 (и в ее обозначениях), что
$$\operatorname{Res}(f,g) = a_0^m \prod_{i=1}^{n} g(x_i) = (-1)^{mn} b_0^n \prod_{j=1}^{m} f(y_j).$$

Задача 2 (**Связь результанта и дискриминанта).** Пользуясь Задачей 1, докажите, что
$$\operatorname{Res}(f,f') = \pm a_0 \operatorname{D}(f).$$

Задача 3. Докажите, что многочлен f имеет кратные корни тогда и только тогда, когда
$$\operatorname{Res}(f,f') = 0.$$

Задача 4. Найдите все значения λ, при которых многочлен $x^3 - 8x^2 + (13-\lambda)x - (6+2\lambda)$ имеет кратный корень.

Задача 5. Найдите все значения λ, при которых многочлены $x^3+\lambda x^2-9$ и $x^3+\lambda x-3$ имеют общий корень.

Задача 6. Решить систему
$$\begin{cases} y^2 + (x-4)y + x^2 - 2x + 3 = 0 \\ y^3 - 5y^2 + (x+7)y + x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0. \end{cases}$$

Попробуйте построить в Wolfram соответствующие кривые. Сколько точек пересечения вы видите? Сравните с теоремой Безу.