

Листок 5

Разное

1. След матрицы. Напомним, что *следом* $\text{tr } A$ квадратной матрицы $A \in \text{Mat}_n(K)$ называется сумма ее диагональных элементов: $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Задача 1. Докажите, что $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ для любых матриц $A, B \in \text{Mat}_n(K)$. Выведите отсюда, что $\text{tr}(C^{-1}AC) = \text{tr } A$ для любой невырожденной матрицы C .

Задача 2.

- (a) Докажите, что не существует матриц $A, B \in \text{Mat}_n(K)$, таких что $AB - BA = E$.
- (b) Докажите, что если $\text{rk } A = 1$ и $\text{tr}(AB) = 0$, то $ABA = 0$.

Задача 3 (*Частный случай теоремы Гамильтона-Кэли*). Докажите, что любая матрица A размера 2×2 удовлетворяет¹ уравнению

$$x^2 - (\text{tr } A)x + \det A = 0.$$

Задача 4 (*). Пусть A — матрица размера 2×2 и k — целое число, большее двух. Докажите, что $A^k = 0$ тогда и только тогда, когда $A^2 = 0$.

2. Матричные единицы. *Матричной единицей* E_{ij} называется матрица, у которой на (i, j) -месте стоит 1, а на остальных местах — 0. Так, каждая матрица $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n,m}(K)$ может быть записана в виде

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} E_{ij}.$$

Задача 5. Пусть A — произвольная матрица.

- (a) Вычислите $E_{ij}A$;
- (b) Вычислите AE_{ij} ;
- (c) Докажите, что $E_{ij}E_{pq} = \delta_{jp}E_{iq}$, где δ_{jp} — символ Кронекера.

Задача 6 (!). Доказать, что квадратная матрица A коммутирует (перестановочна) со всеми невырожденными матрицами тогда и только тогда, когда A *скалярна*, то есть имеет вид $A = \lambda E$ для некоторого числа λ .

3. Нильпотентные матрицы. Матрица A называется *нильпотентной*, если $A^n = 0$ (нулевая матрица) для некоторого $n \geq 0$. Наименьшее целое положительное число k , для которого $A^k = 0$ называется *показателем нильпотентности* матрицы A .

Задача 7. Пусть матрица A нильпотентна. Докажите, что матрицы $E - A$ и $E + A$ обратимы.

Квадратная матрица называется *верхней (нижней) треугольной*, если все ее элементы, стоящие ниже (соответственно выше) главной диагонали, равны нулю.

¹Если вместо x подставить A .

Задача 8. Покажите, что треугольная матрица тогда и только тогда нильпотентна, когда все элементы главной диагонали равны нулю, а показатель нильпотентности треугольной матрицы не превосходит ее порядка.

Задача 9. Пусть A нильпотентная матрица размера 2×2 . Докажите, что $\operatorname{tr} A = 0$. Верно ли это для матриц бóльшего размера?

Задача 10. Докажите, что сумма двух коммутирующих нильпотентных матриц является нильпотентной матрицей. Верно ли это, если матрицы не коммутируют?