Листок 7

Перестановки и определители.

Еще немного о перестановках. Как вы помните, всякая перестановка раскладывается в произведение транспозиций. Следующая задача показывает (пункты a и b), что эти транспозиции можно выбрать вполне конкретным образом.

Задача 1. Докажите, что всякая перестановка $\sigma \in \mathrm{S}_n$ может быть представлена как произведение циклов вида:

(a) $(12),\ (13), \dots, (1, n)$;
(b) $(12),\ (23), \dots, (n-1, n)$;
(c) $(12),\ (123 \dots n)$.

Задача 2. Решите уравнение в перестановках:

(a) $\sigma^2 = (12)(34)(567)$, $\sigma \in \mathrm{S}_7$;
(b) $\sigma(12) = (12)\sigma$, $\sigma \in \mathrm{S}_5$;
(c) $\sigma^3 = (123)$, $\sigma \in \mathrm{S}_n$.

Задача 3 $(\star)$**.** Докажите, что любую перестановку $\sigma \in \mathrm{S}_n$ можно представить в виде произведения двух перестановок порядка 2, то есть $\sigma = \alpha\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathrm{S}_n$ и $\alpha^2 = \beta^2 = \mathrm{id}$ (тождественная перестановка).

Определители. Определители дают еще один способ думать о знаке перестановки. А именно, каждой перестановке $\sigma \in \mathrm{S}_n$ сопоставим линейное отображение $T_\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ по правилу

$$T_\sigma(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 e_{\sigma(1)} + \ldots + x_n e_{\sigma(n)},$$

где $e_1, \dots, e_n$ — некоторый базис в $\mathbb{R}_n$. Другими словами, T_σ просто переставляет координаты вектора $(x_1, \dots, x_n)$. Значит, перестановке σ можно сопоставить матрицу[1] $[T_\sigma]$ отображения T_σ, у которой в каждой строке и столбце единственный ненулевой элемент равен 1. Например, для $\sigma = (123) \in \mathrm{S}_3$ имеем $T_\sigma(e_1) = e_2$, $T_\sigma(e_2) = e_3$ и $T_\sigma(e_3) = e_1$. Получаем матрицу

$$[T_\sigma] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0. \end{pmatrix}$$

Задача 4. Докажите, что соответствие $\sigma \mapsto T_\sigma$ мультипликативно, то есть $[T_{\sigma\tau}] = [T_\sigma][T_\tau]$ для $\sigma, \tau \in \mathrm{S}_n$. В частности, $\det[T_{\sigma\tau}] = \det[T_\sigma]\det[T_\tau]$.

Задача 5. Докажите, что $\mathrm{sgn}(\sigma) = \det[T_\sigma]$.

Из предыдущих двух задач мы также получаем новое доказательство того, что знак перестановки — мультипликативен.

[1] В этом листке матрицу отображения A мы обозначаем квадратными скобками, то есть $[A]$.

Задача 6 (Кострикин 13.1 а, в, 13.2 б)**.** Вычислите определители:

$$(a)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix} \qquad (b)\ \begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix} \qquad (c)\ \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ & \dots & \dots & \dots & \\ n & n & n & n & n \end{vmatrix}$$

Вообще, возьмите задачник Кострикина и посчитайте определители оттуда, как можно больше.