Листок 8

Методы вычисления определителей. Кососимметрические и унимодулярные матрицы. Многочлен Лагранжа.

1. Разложение по строке/столбцу.

Задача 1 («Схема Горнера»). Показать, что

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & a_2 \\ .. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix} = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Задача 2. Вычислить

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ .. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

2. Элементарные преобразования.

Задача 3. Приведением к треугольному виду вычислить определители

$$(a) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ .. & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (b) \quad \begin{vmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ .. & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$$

3. Метод рекуррентных соотношений.

Задача 4. Методом рекуррентных соотношений вычислить определители

$$(a) \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ .. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad (b) \quad \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 \\ .. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

Определитель Вандермонда и интерполяционная формула Лагранжа. Определитель Вандермонда применяется, например, для решения следующей задачи *интерполяции*.

Задача 5 (**Интерполяционная формула Лагранжа).**

(a) Пусть $a_1, \dots, a_n$ — попарно различные числа, а $b_1, \dots, b_n$ — произвольные числа. Докажите, что существует и единственный многочлен $f(x)$ такой, что степень f не превосходит $n-1$ и $f(a_i) = b_i$.

(b) Покажите, что этот многочлен имеет вид
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{(x-a_1)\dots\widehat{(x-a_i)}\dots(x-a_n)}{(a_i-a_1)\dots\widehat{(a_i-a_i)}\dots(a_i-a_n)}$$
(здесь крышка над множителем означает, что он не входит в произведение).

Многочлен из предыдущей задачи называется *интерполяционным многочленом Лагранжа*.

Кососимметрические матрицы. Напомним, что квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется *кососимметрической*, если $a_{ij} = -a_{ji}$.

Задача 6. Докажите, что определитель кососимметрической матрицы нечетного размера равен нулю.

Задача 7. Докажите, что определитель кососимметрической матрицы четного размера не изменится, если ко всем ее элементам прибавить одно и то же число.

Задача 8. Вычислите определитель кососимметрической матрицы $A_n = (a_{ij})_{i,j=1}^{2n}$ с элементами $a_{ij} = 1$ при $i < j$.

Унимодулярные матрицы.

Задача 9. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z})$ — квадратная матрица с целыми коэффициентами. Докажите, что A^{-1} существует и имеет целые коэффициенты тогда и только тогда, когда $\det A = \pm 1$.

Квадратные матрицы с целыми коэффициентами, определитель которых равен 1 или -1 называются *унимодулярными*. Такие матрицы повсеместно встречаются в алгебре, комбинаторике, computer science и т.д. Например, матрица инцидентности любого ориентированного графа является унимодулярной. Другой пример — матрицы перестановки T_σ из Листка 7.