

Листок 9

Поле комплексных чисел

Задача 1. Что из нижеследующего является полем, а что — только кольцом:

- (а) Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ с обычными операциями сложения и умножения;
- (б) Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ с обычными операциями сложения и умножения;
- (в) Множество вещественных чисел вида $x + y\sqrt{2}$, где $x, y \in \mathbb{Q}$, с обычными операциями сложения и умножения вещественных чисел;
- (г) Множество *гауссовых чисел* $x + iy$, где $x, y \in \mathbb{Z}$, с обычными операциями сложения и умножения комплексных чисел;
- (д) Множество квадратных матриц $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ с обычными матричными операциями.
- (е) Множество

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{Q} \right\},$$

где n — фиксированное целое число, с обычными матричными операциями.

- (ё) Множество

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\},$$

где n — фиксированное целое число, с обычными матричными операциями.

- (ж) Кольцо вычетов $\mathbb{Z}_5$ по модулю 5.
- (з) Кольцо вычетов $\mathbb{Z}_6$ по модулю 6.
- (и) Множество рациональных (то есть вида $\frac{p(x)}{q(x)}$, где p и q — многочлены) функций с обычными операциями сложения и умножения.
- (к) Множество функций вещественного переменного, непрерывных на отрезке $[a, b]$, с обычными операциями сложения и умножения функций.

Задача 2 (Кострикин 20.1 е, г, и). Вычислить:

$$(a) \frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}; \quad (b) \frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}; \quad (c) (2+i)^3 + (2-i)^3.$$

Комплексные числа в тригонометрической форме. Формула Муавра.

Задача 3 (Кострикин 21.2 б, ж). Вычислить:

$$(a) (1+i\sqrt{3})^{150}; \quad (b) \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i} \right)^{30}.$$

Задача 4 (Кострикин 21.9 а,г). При $n \in \mathbb{Z}$ вычислить выражения:

$$(a) \quad (1+i)^n; \quad (b) \quad (1 + \cos \varphi + i \sin \varphi)^n.$$

Задача 5. Доказать равенство

$$\cos nx = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k} x \cdot \sin^{2k} x,$$

где $[n/2]$ обозначает целую часть числа $n/2$.

Задача 6. Выразить через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных x , функцию $\sin^5 x$.

Геометрия комплексных чисел.

Задача 7. Найдите на плоскости $\mathbb{R}^2$ геометрическое место точек z^{-1} , где z пробегает прямую $\{1 + bi : b \in \mathbb{R}\}$.

Задача 8. Нарисуйте на плоскости $\mathbb{R}^2$ множество

$$\left\{ z = \frac{1+it}{1-it} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Задача 9. Найдите все $z \in \mathbb{C}$, для которых $|z+i| + |z-i| = 2$.